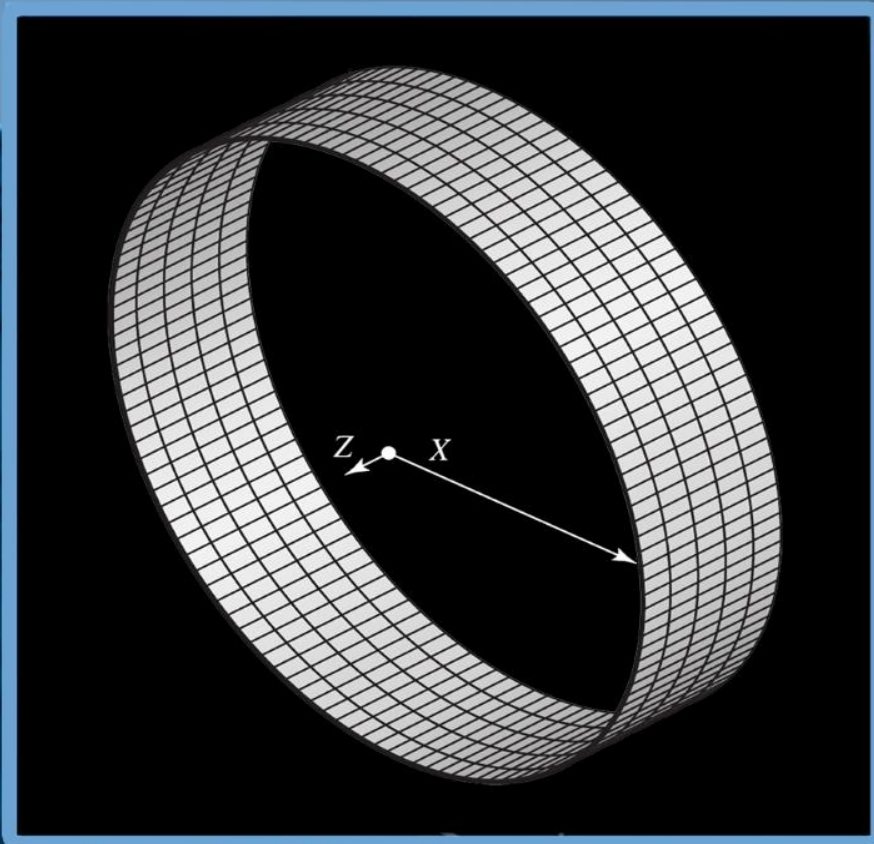


فصل چهارم



سازه‌های خریپایی

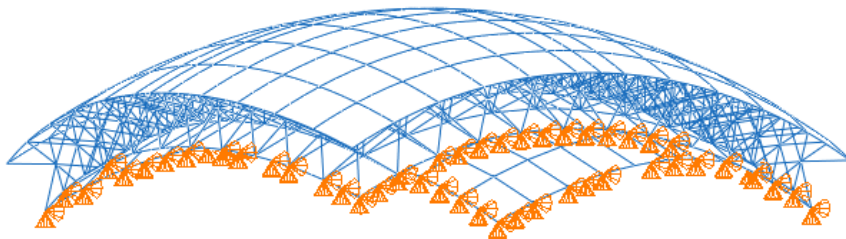
مبانی تحلیل اجزاء محدود، تألیف دیوید هاتن، ترجمه شهاب الدین حاتمی و همکاران

مرجع اصلی:

فهرست مطالب



پل طبیعت تهران



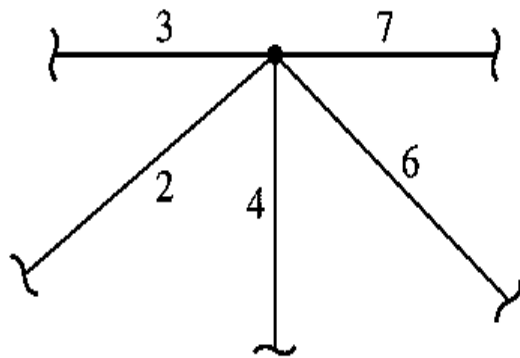
پوسته ساندویچی با هسته خرپایی
(پایان نامه کارشناسی ارشد - دانشگاه یاسوج)

- مقدمه
- انتقال المان
- مونتاژ مستقیم ماتریس سختی کل
- شرایط مرزی، نیروهای مقید
- کرنش و تنش المان
- مثال جامع
- خرپاهای سه بعدی
- خلاصه

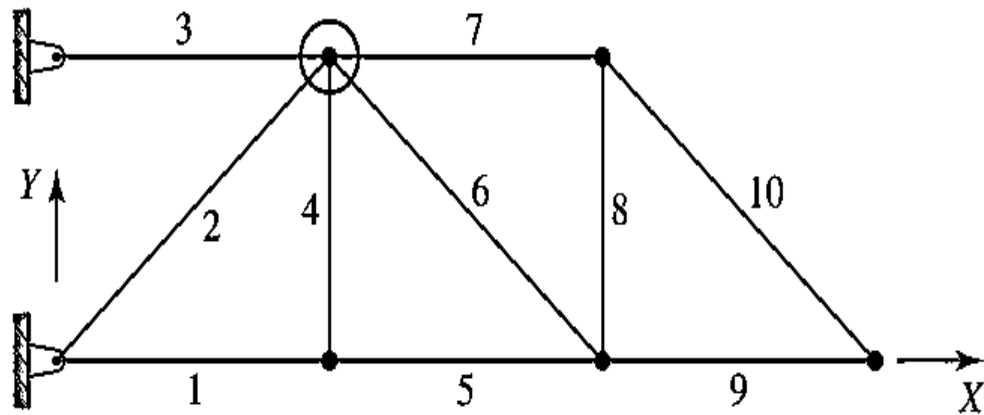
مقدمه

❖ سازه خربایی، سازه‌ای متشکل از اعضای الاستیک مستقیم است که اعضای آن تنها تحت نیروهای محوری قرار دارند.

❖ تمامی اعضای خرپا از نوع المان‌های میله و اتصال آن‌ها به صورت مفصلی است.



(ب)

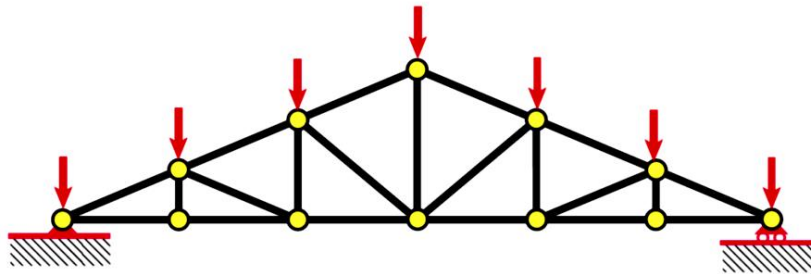


(الف)

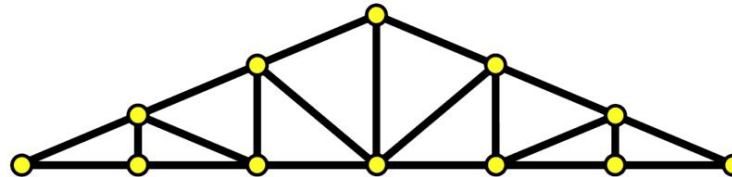
(الف) خربای دو بعدی متشکل از ۱۰ المان (ب) گرهی از خرپا با پنج المان متصل به آن

مراحل تحلیل اجزای محدود خرپا

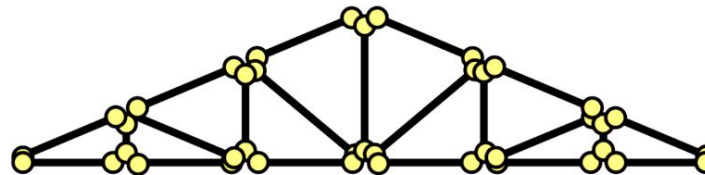
FEM model:



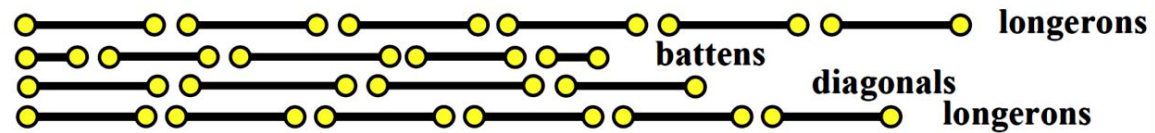
**Remove loads
& supports:**



Disassemble:



Localize:

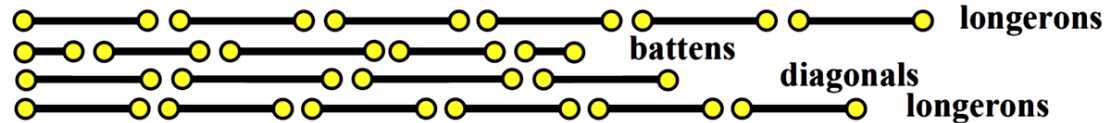


Generic element:

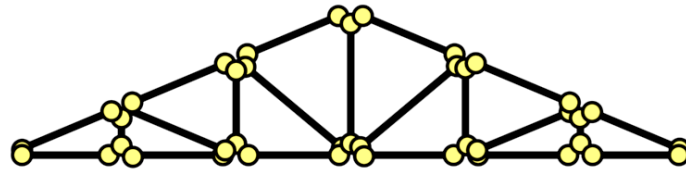


مراحل تحلیل اجزای محدود خربایی

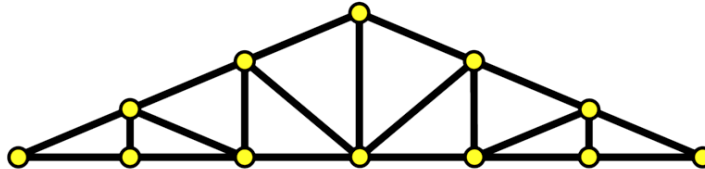
Form elements:



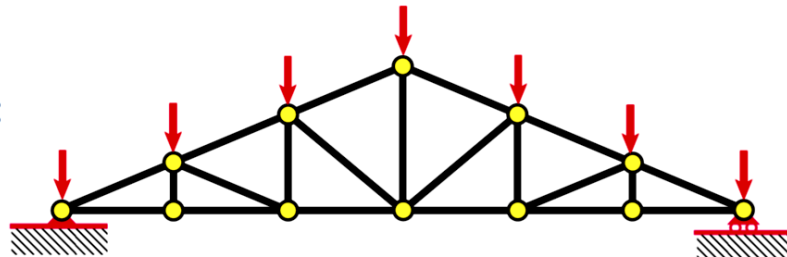
Globalize:



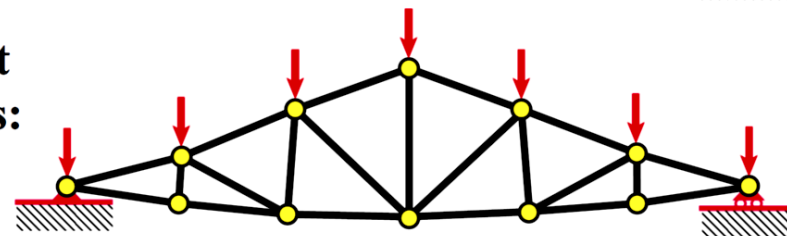
Merge:



Apply loads and supports:



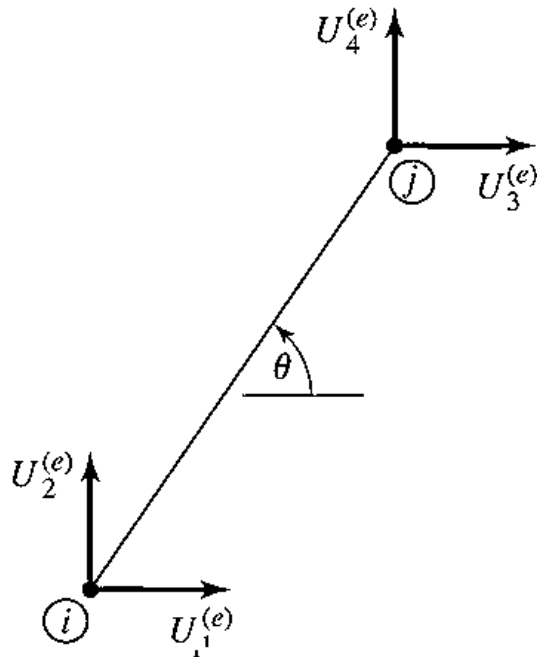
Solve for joint displacements:



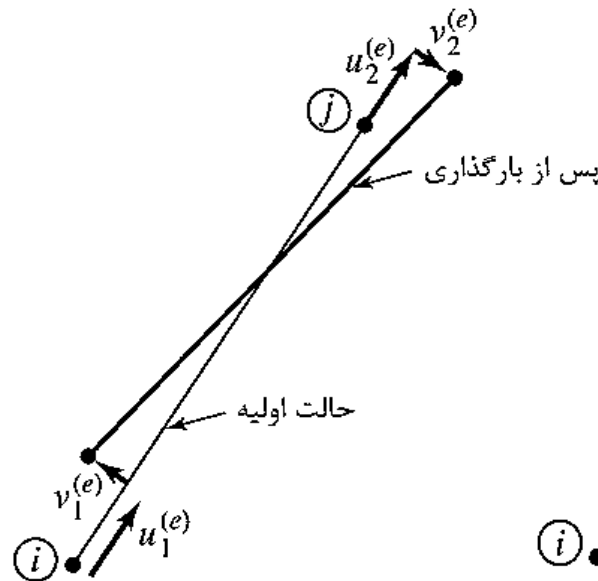
انتقال المان

$$[K]\{U\} = \{F\}$$

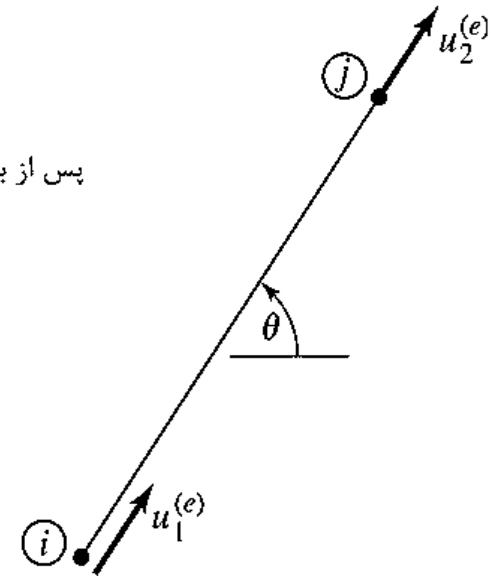
$$\begin{bmatrix} k_e & -k_e \\ -k_e & k_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(e)} \\ f_2^{(e)} \end{Bmatrix}$$



(ج)



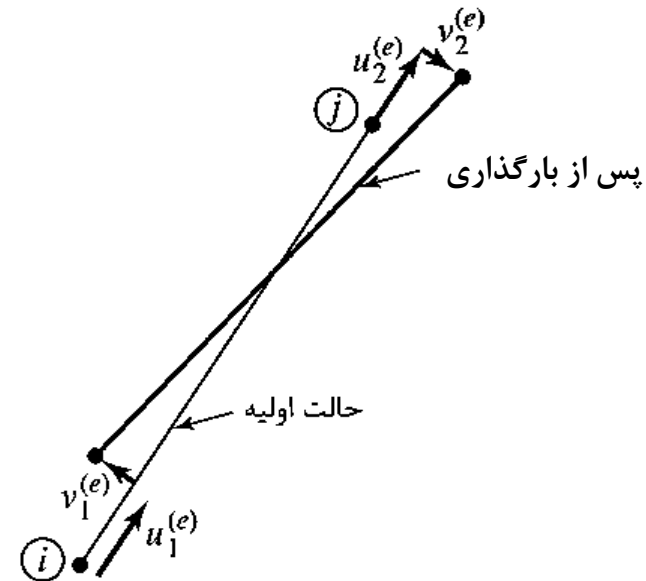
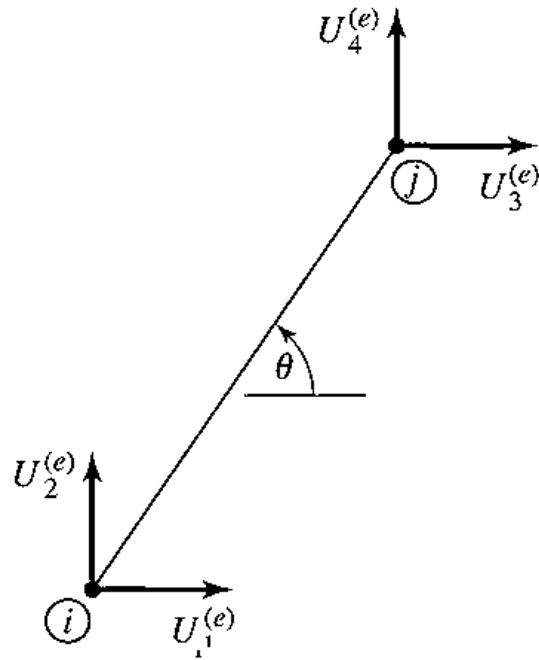
(ب)



(الف)

الف) المان میله با زاویه θ نسبت به محور افق
ب) جابجایی‌های معمولی المان میله ج) جابجایی‌های کلی المان میله

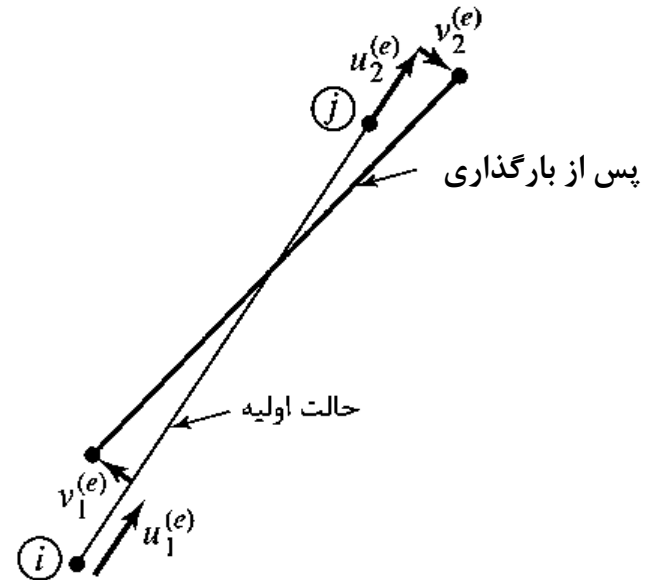
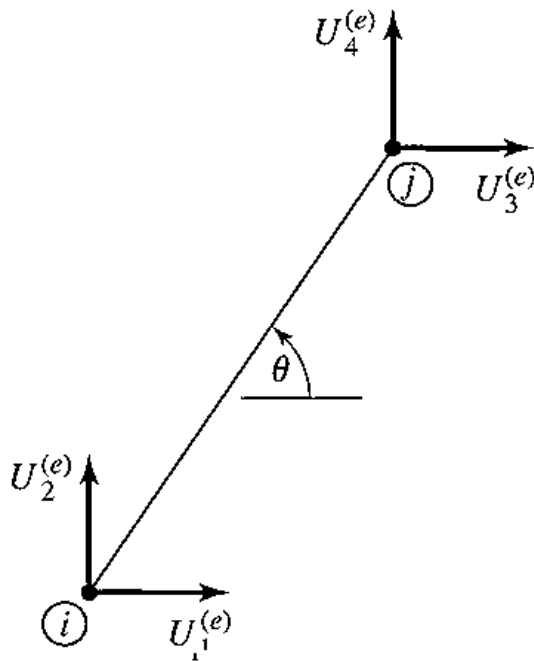
انتقال المان



$$u_1^{(e)} = U_1^{(e)} \cos \theta + U_2^{(e)} \sin \theta$$

$$u_2^{(e)} = U_3^{(e)} \cos \theta + U_4^{(e)} \sin \theta$$

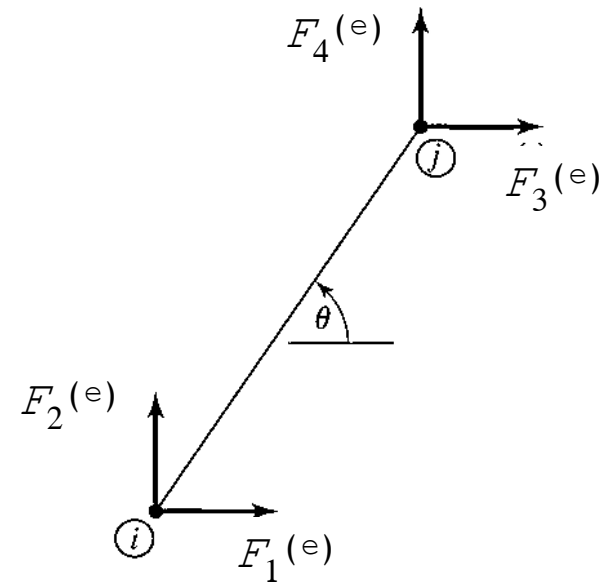
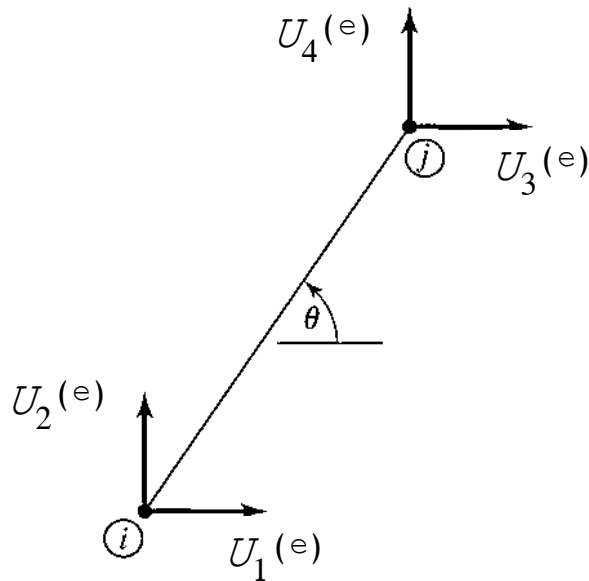
انتقال المان



$$\begin{Bmatrix} u_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^{(e)} \\ U_2^{(e)} \\ U_3^{(e)} \\ U_4^{(e)} \end{Bmatrix} = [R] \begin{Bmatrix} U_1^{(e)} \\ U_2^{(e)} \\ U_3^{(e)} \\ U_4^{(e)} \end{Bmatrix}$$

$[R]$: ماتریس انتقال جابجایی‌های
محوری المان به جابجایی‌های کلی

انتقال المان



$$[K^{(e)}] \begin{Bmatrix} U_1^{(e)} \\ U_2^{(e)} \\ U_3^{(e)} \\ U_4^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{(e)} \\ F_2^{(e)} \\ F_3^{(e)} \\ F_4^{(e)} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

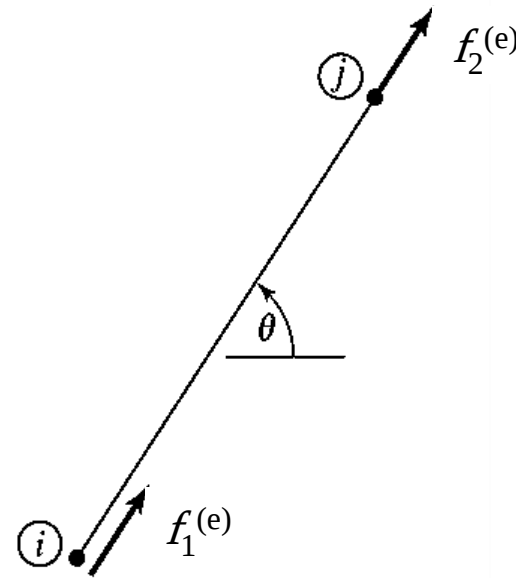
$[K^{(e)}]$ بیانگر ماتریس سختی المان در
دستگاه مختصات کلی و

بردار $\{ F^{(e)} \}$ شامل مولفه‌های نیروهای گرهی
در دستگاه کلی می‌باشد.

انتقال المان

$$\begin{bmatrix} k_e & -k_e \\ -k_e & k_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(e)} \\ f_2^{(e)} \end{Bmatrix}$$

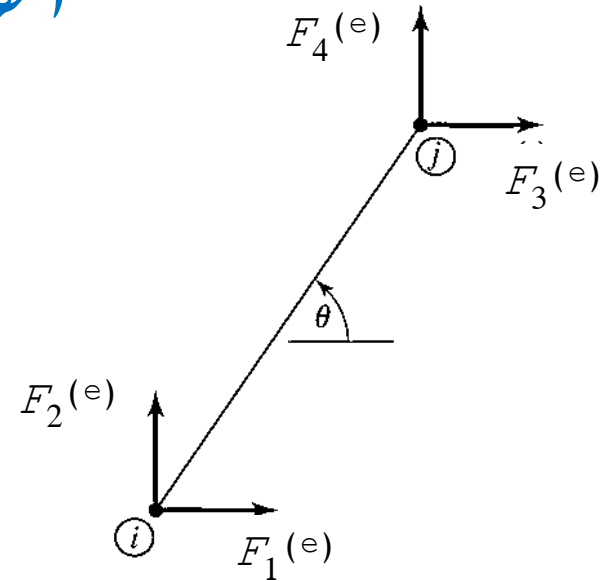
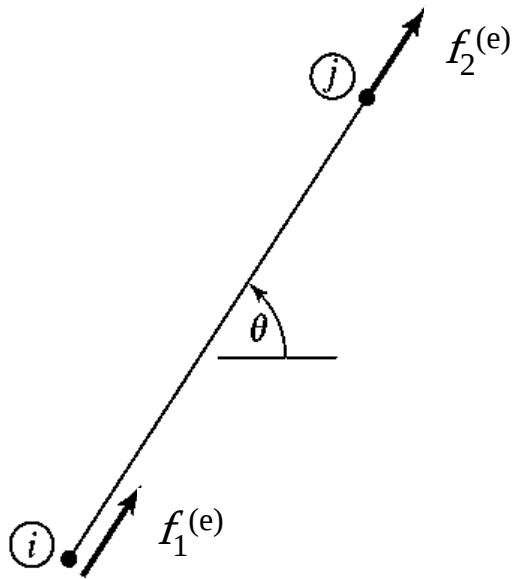
$$\begin{bmatrix} k_e & -k_e \\ -k_e & k_e \end{bmatrix} [R] \begin{Bmatrix} U_1^{(e)} \\ U_2^{(e)} \\ U_3^{(e)} \\ U_4^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(e)} \\ f_2^{(e)} \end{Bmatrix}$$



$$[R]^T \begin{bmatrix} k_e & -k_e \\ -k_e & k_e \end{bmatrix} [R] \begin{Bmatrix} U_1^{(e)} \\ U_2^{(e)} \\ U_3^{(e)} \\ U_4^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta \\ 0 & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1^{(e)} \\ f_2^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(e)} \cos \theta \\ f_1^{(e)} \sin \theta \\ f_2^{(e)} \cos \theta \\ f_2^{(e)} \sin \theta \end{Bmatrix} \quad (2)$$

طرف راست رابطه (۲) مولفه‌های نیروهای المان در دستگاه مختصات کلی را بیان می‌کند.

انتقال المان



$$[R]^T \begin{bmatrix} k_e & -k_e \\ -k_e & k_e \end{bmatrix} [R] \begin{Bmatrix} U_1^{(e)} \\ U_2^{(e)} \\ U_3^{(e)} \\ U_4^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{(e)} \\ F_2^{(e)} \\ F_3^{(e)} \\ F_4^{(e)} \end{Bmatrix}$$

$$[K^{(e)}] = [R]^T \begin{bmatrix} k_e & -k_e \\ -k_e & k_e \end{bmatrix} [R] \quad (3)$$

انتقال المان

با تعریف نمادهای $c = \cos \theta$ و $s = \sin \theta$ و انجام ضرب ماتریسی سمت راست از رابطه (۳)، نتیجه زیر به دست می‌آید.

$$[K^{(e)}] = k_e \begin{bmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ sc & s^2 & -sc & -s^2 \\ -c^2 & -sc & c^2 & sc \\ -sc & -s^2 & sc & s^2 \end{bmatrix}$$

که در آن $k_e = \frac{AE}{L}$ سختی محوری المان می‌باشد.

انتقال المان اکینوس‌های مادی

$$L = \left[(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

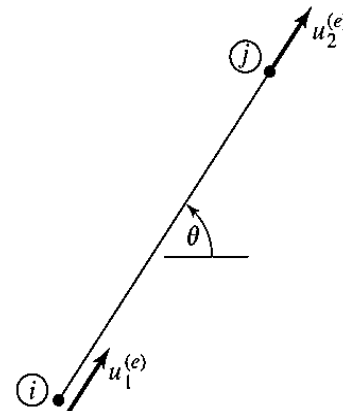
و بردار واحد در امتداد گره i تا گره j به صورت زیر می‌باشد.

$$\lambda = \frac{1}{L} \left[(X_j - X_i) \mathbf{I} + (Y_j - Y_i) \mathbf{J} \right] = \cos \theta_x \mathbf{I} + \cos \theta_y \mathbf{J}$$

که $\mathbf{I}$ و $\mathbf{J}$ بردارهای یکه در جهات مختصات کلی X و Y می‌باشند.

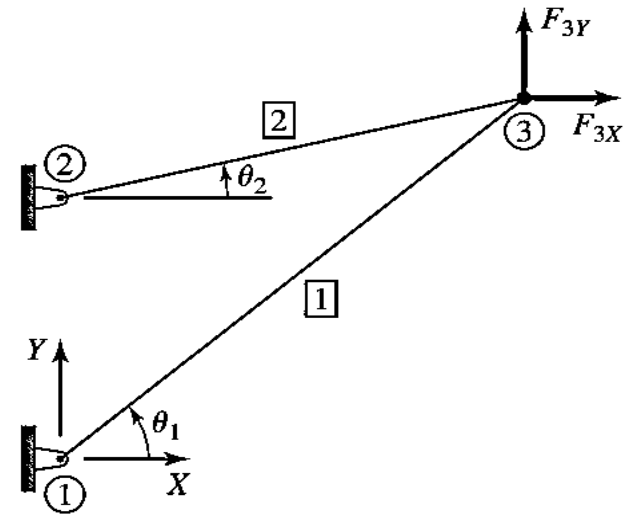
$$\cos \theta = \cos \theta_x = \lambda \cdot \mathbf{I} = \frac{X_j - X_i}{L}$$

$$\sin \theta = \cos \theta_y = \lambda \cdot \mathbf{J} = \frac{Y_j - Y_i}{L}$$



مونتاژ مستقیم ماتریس سختی کل

$$[K^{(1)}] = \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & k_{13}^{(1)} & k_{14}^{(1)} \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} & k_{23}^{(1)} & k_{24}^{(1)} \\ k_{31}^{(1)} & k_{32}^{(1)} & k_{33}^{(1)} & k_{34}^{(1)} \\ k_{41}^{(1)} & k_{42}^{(1)} & k_{43}^{(1)} & k_{44}^{(1)} \end{bmatrix}$$



برای المان ۱

$$[K^{(2)}] = \begin{bmatrix} k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} & k_{13}^{(2)} & k_{14}^{(2)} \\ k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} & k_{23}^{(2)} & k_{24}^{(2)} \\ k_{31}^{(2)} & k_{32}^{(2)} & k_{33}^{(2)} & k_{34}^{(2)} \\ k_{41}^{(2)} & k_{42}^{(2)} & k_{43}^{(2)} & k_{44}^{(2)} \end{bmatrix}$$

و برای المان ۲

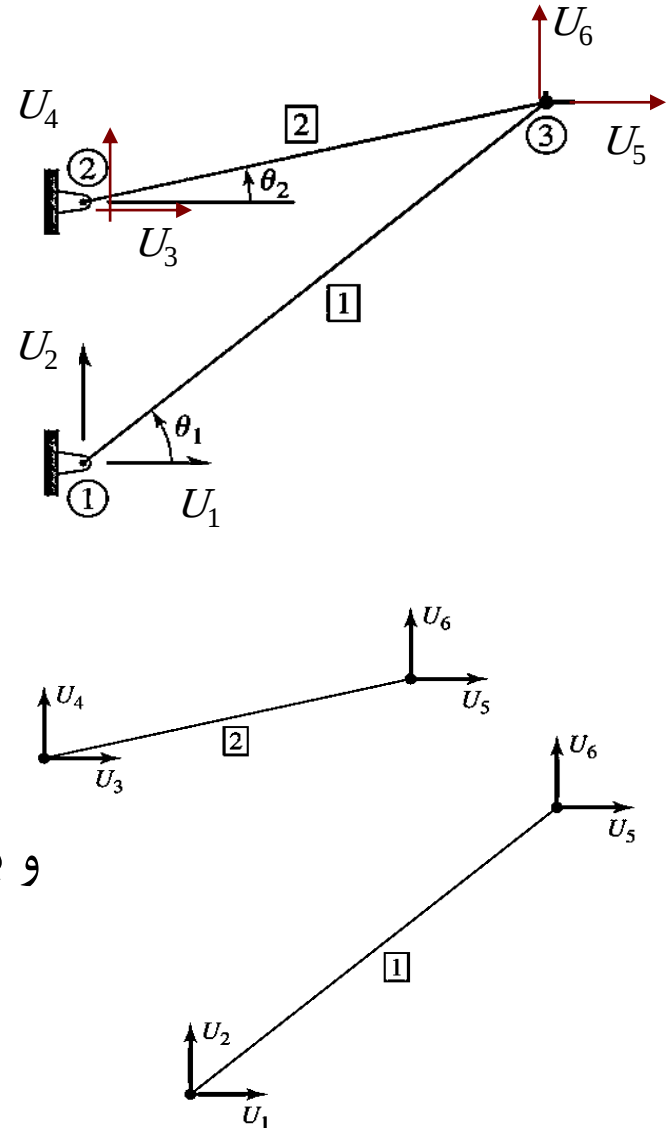
مونتاژ مستقیم ماتریس سختی کل

$$\{U^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} U_1^{(e)} \\ U_2^{(e)} \\ U_3^{(e)} \\ U_4^{(e)} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix}$$

برای المان ۱

$$\{U^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} U_1^{(e)} \\ U_2^{(e)} \\ U_3^{(e)} \\ U_4^{(e)} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix}$$

و برای المان ۲



مونتاژ مستقیم ماتریس سختی کل

$$K_{11} = K_{11}^{(1)} + 0$$

$$K_{12} = K_{12}^{(1)} + 0$$

$$K_{13} = 0 + 0$$

$$K_{14} = 0 + 0$$

$$K_{15} = k_{13}^{(1)} + 0$$

$$K_{16} = k_{14}^{(1)} + 0$$

$$K_{22} = k_{22}^{(1)} + 0$$

$$K_{23} = 0 + 0$$

$$K_{24} = 0 + 0$$

$$K_{25} = k_{23}^{(1)} + 0$$

$$K_{26} = k_{24}^{(1)} + 0$$

$$K_{33} = 0 + k_{11}^{(2)}$$

$$K_{34} = 0 + k_{12}^{(2)}$$

$$K_{35} = 0 + k_{13}^{(2)}$$

$$K_{36} = 0 + k_{14}^{(2)}$$

$$K_{44} = 0 + k_{22}^{(2)}$$

$$K_{45} = 0 + k_{23}^{(2)}$$

$$K_{46} = 0 + k_{24}^{(2)}$$

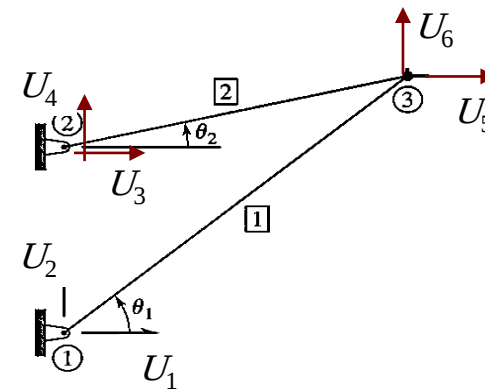
$$K_{55} = k_{33}^{(1)} + k_{33}^{(2)}$$

$$K_{56} = k_{34}^{(1)} + k_{34}^{(2)}$$

$$K_{66} = k_{44}^{(1)} + k_{44}^{(2)}$$

جدول تناظر جابجایی گرهی

جابجایی المان ۲	جابجایی المان ۱	جابجایی کلی
۰	۱	۱
۰	۲	۲
۱	۰	۳
۲	۰	۴
۳	۳	۵
۴	۴	۶

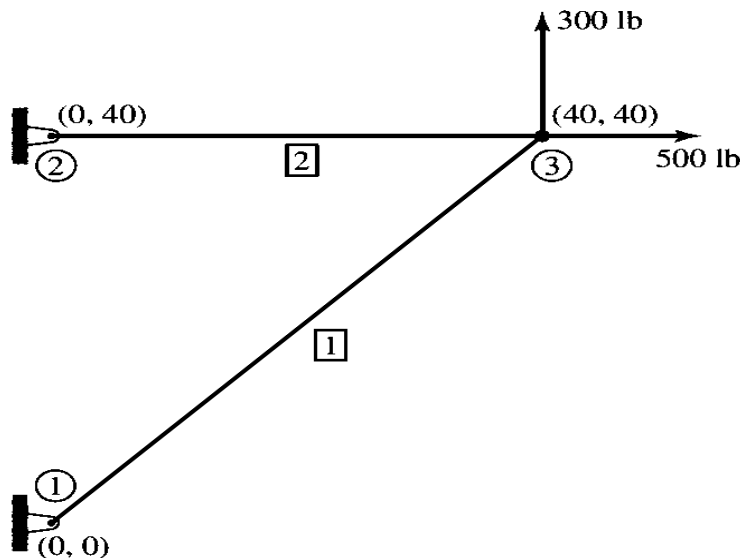


مونتاژ مستقیم ماتریس سختی کل

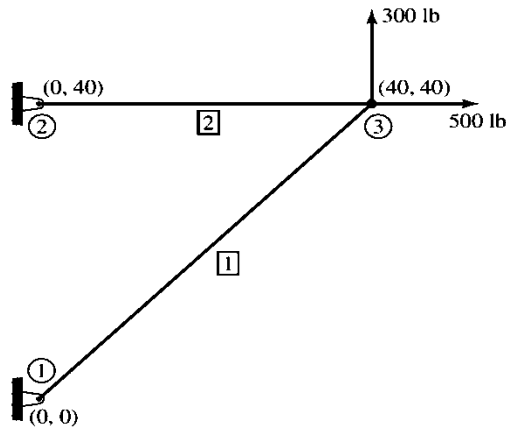
مثال

برای خربای نشان داده شده در شکل، $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ ، $\theta_2 = 0$ و خصوصیات المان به صورت $k_1 = A_1 E_1 / L_1$ و $k_2 = A_2 E_2 / L_2$ می‌باشد.

ماتریس سختی المانی هر المان را به چارچوب مرجع کل انتقال دهید و ماتریس سختی کل را مونتاژ نمایید.



مونتاژ مستقیم ماتریس سختی کل



حل

برای المان ۱، $\cos \theta_1 = \sin \theta_1 = \sqrt{2} / 2$

و $c^2 \theta_1 = s^2 \theta_1 = s \theta_1 c \theta_1 = \frac{1}{2}$ ، بنابراین

با جایگذاری این اطلاعات داریم:

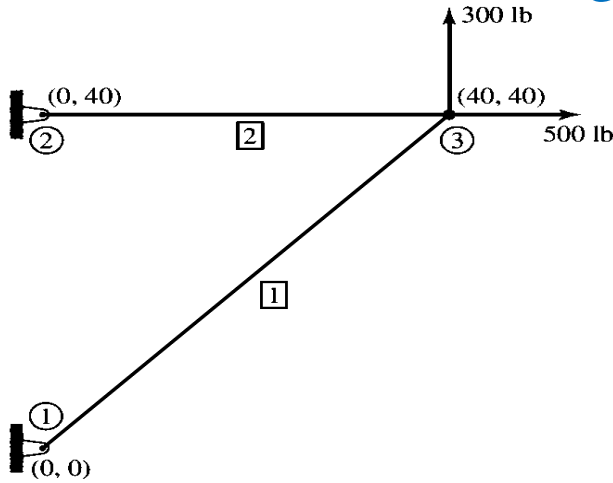
$$[K^{(1)}] = \frac{k_1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

و برای المان ۲، $\cos \theta_2 = 1$ و $\sin \theta_2 = 0$ می‌باشد، لذا ماتریس سختی انتقال یافته

به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$[K^{(2)}] = k_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مونتاژ مستقیم ماتریس سختی کل



$$K_{11} = k_1 / 2$$

$$K_{12} = k_1 / 2$$

$$K_{13} = 0$$

$$K_{14} = 0$$

$$K_{15} = -k_1 / 2$$

$$K_{16} = -k_1 / 2$$

$$K_{22} = k_1 / 2$$

$$K_{23} = 0$$

$$K_{24} = 0$$

$$K_{25} = -k_1 / 2$$

$$K_{26} = -k_1 / 2$$

$$K_{33} = k_2$$

$$K_{34} = 0$$

$$K_{35} = -k_2$$

$$K_{36} = 0$$

$$K_{44} = 0$$

$$K_{45} = 0$$

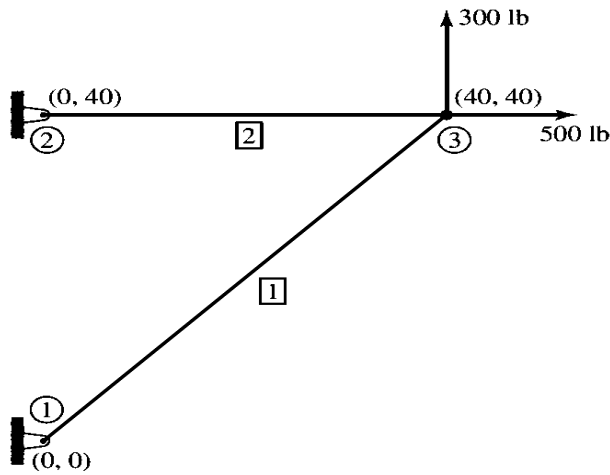
$$K_{46} = 0$$

$$K_{55} = k_1 / 2 + k_2$$

$$K_{56} = k_1 / 2$$

$$K_{66} = k_1 / 2$$

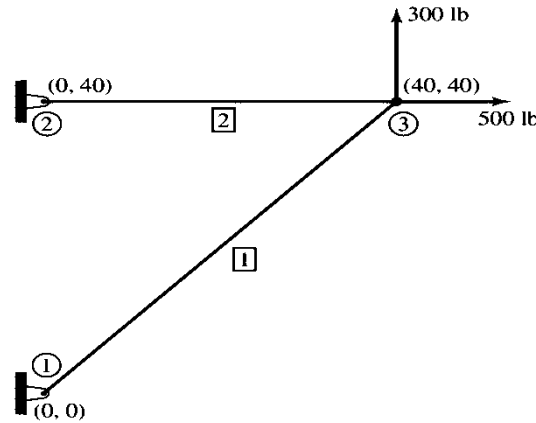
مونتاژ مستقیم ماتریس سختی کل



بنابراین ماتریس سختی کل تکمیل شده برابر است با

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1/2 & k_1/2 & 0 & 0 & -k_1/2 & -k_1/2 \\ k_1/2 & k_1/2 & 0 & 0 & -k_1/2 & -k_1/2 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 & -k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1/2 & -k_1/2 & -k_2 & 0 & k_1/2 + k_2 & k_1/2 \\ -k_1/2 & -k_1/2 & 0 & 0 & k_1/2 & k_1/2 \end{bmatrix}$$

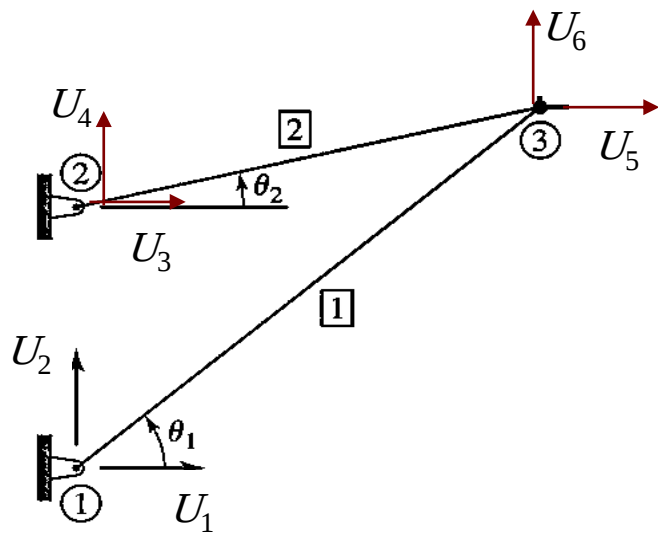
مونتاژ مستقیم ماتریس سختی کل



$$[K^{(1)}] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & k_{13}^{(1)} & k_{14}^{(1)} \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} & k_{23}^{(1)} & k_{24}^{(1)} \\ k_{31}^{(1)} & k_{32}^{(1)} & k_{33}^{(1)} & k_{34}^{(1)} \\ k_{41}^{(1)} & k_{42}^{(1)} & k_{43}^{(1)} & k_{44}^{(1)} \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

$$[K^{(2)}] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} & k_{13}^{(2)} & k_{14}^{(2)} \\ k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} & k_{23}^{(2)} & k_{24}^{(2)} \\ k_{31}^{(2)} & k_{32}^{(2)} & k_{33}^{(2)} & k_{34}^{(2)} \\ k_{41}^{(2)} & k_{42}^{(2)} & k_{43}^{(2)} & k_{44}^{(2)} \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

بردار موقعیت تغییر مکان المانی



$$[L^{(e)}] = [2i - 1 \quad 2i \quad 2j - 1 \quad 2j]$$

$$[L^{(1)}] = [1 \quad 2 \quad 5 \quad 6]$$

$$[L^{(2)}] = [3 \quad 4 \quad 5 \quad 6]$$

جدول اتصال المان - گره

گره		
j	i	المان
۳	۱	۱
۳	۲	۲

شرایط مرزی، نیروهای تکیه‌گاهی

$$[K] \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

$$U_1 = U_2 = U_3 = U_4 = 0$$

$$K_{15}U_5 + K_{16}U_6 = F_1$$

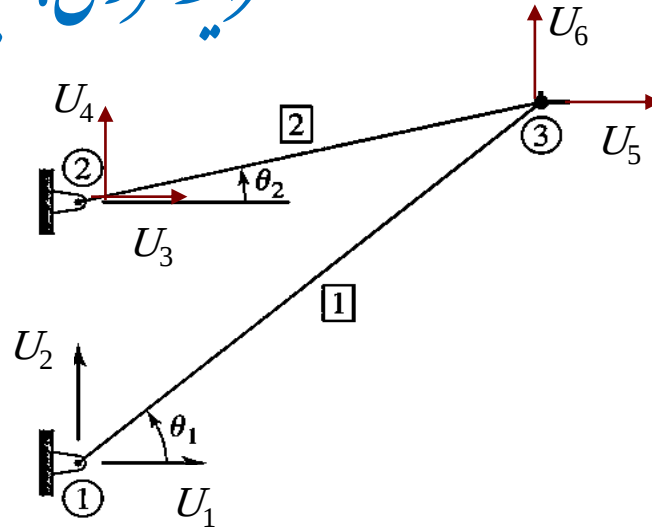
$$K_{25}U_5 + K_{26}U_6 = F_2$$

$$K_{35}U_5 + K_{36}U_6 = F_3$$

$$K_{45}U_5 + K_{46}U_6 = F_4$$

$$K_{55}U_5 + K_{56}U_6 = F_5$$

$$K_{56}U_5 + K_{66}U_6 = F_6$$



تنها جابجایی‌های U_5 و U_6 باید تعیین شوند.

با جایگذاری مقادیر شرایط مرزی و بسط رابطه

(۱)، در نهایت روابط روبرو به دست می‌آیند.

از دو رابطه اول جابجایی‌های مجهول و از چهار

رابطه آخر نیروهای تکیه‌گاهی بدست می‌آیند.

شرایط مرزی، نیروهای تکیه‌گاهی

در یک حالت کلی تر وقتی جابجایی‌های مقید (معلوم) لزوماً صفر نیستند:

$$\begin{bmatrix} K_{cc} & K_{ca} \\ K_{ac} & K_{aa} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_c \\ U_a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_c \\ F_a \end{Bmatrix} \quad (۲)$$

که در این رابطه U_c مقادیر جابجایی‌های معلوم و F_a نیروهای خارجی معلوم می‌باشند (که هیچکدام لزوماً صفر نیستند). لذا می‌توان از طریق بخش پایینی معادله (۲) جابجایی‌های مجهول U_a را به دست آورد:

$$[K_{ac}]\{U_c\} + [K_{aa}]\{U_a\} = \{F_a\}$$

$$\Rightarrow \{U_a\} = [K_{aa}]^{-1}(\{F_a\} - [K_{ac}]\{U_c\})$$

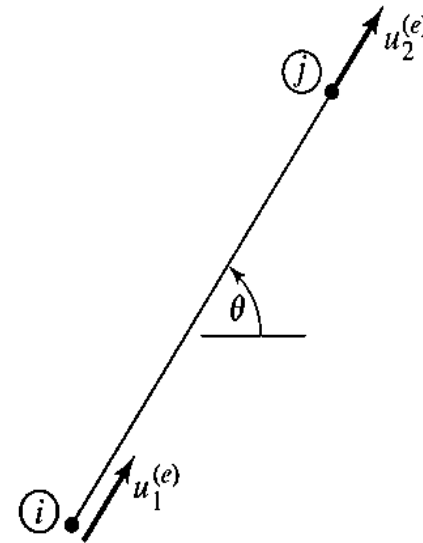
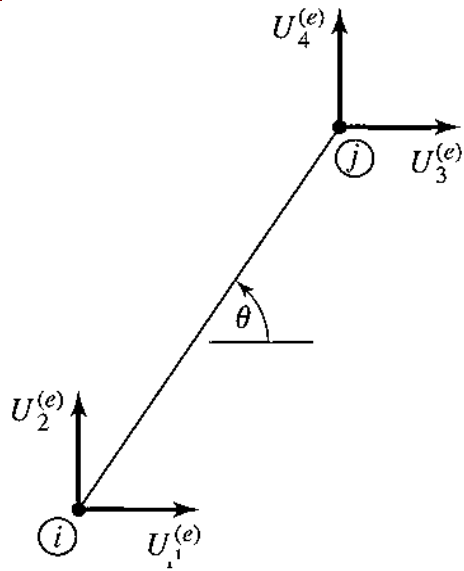
شرایط مرزی، نیروهای تکیه گاهی

با داشتن U_a می توان از بخش بالایی معادله (۲)، F_c نیروهای تکیه گاهی (مجهول) را بدست آورد:

$$\{F_c\} = [K_{cc}]\{U_c\} + [K_{ca}]\{U_a\}$$

که در این رابطه با توجه به ویژگی تقارن ماتریس سختی $[K_{ca}] = [K_{ac}]^T$ می باشد.

کرنش و تنش در المان



$$u_1^{(e)} = U_1^{(e)} \cos \theta + U_2^{(e)} \sin \theta$$

$$u_2^{(e)} = U_3^{(e)} \cos \theta + U_4^{(e)} \sin \theta$$

$$\begin{aligned} \epsilon^{(e)} &= \frac{du^{(e)}(x)}{dx} = \frac{d^{(e)}}{dx} \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{-1}{L^{(e)}} & \frac{1}{L^{(e)}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \end{Bmatrix} = \frac{u_2^{(e)} - u_1^{(e)}}{L^{(e)}} \end{aligned}$$

کرنش و تنش در المان

که $L^{(e)}$ طول المان می‌باشد. سپس تنش محوری المان نیز با اعمال قانون هوک به صورت زیر محاسبه می‌گردد

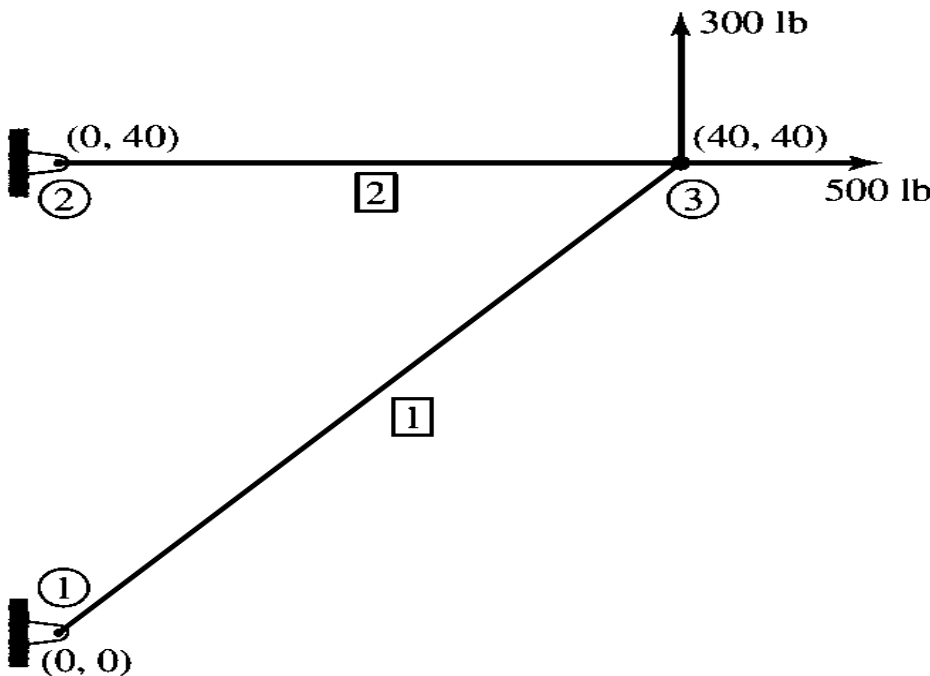
$$\sigma^{(e)} = E \varepsilon^{(e)}$$

$$\varepsilon^{(e)} = \frac{du^{(e)}(x)}{dx} = \frac{d}{dx} [N_1(x) \quad N_2(x)] [R] \begin{Bmatrix} U_1^{(e)} \\ U_2^{(e)} \\ U_3^{(e)} \\ U_4^{(e)} \end{Bmatrix}$$

$$\sigma^{(e)} = E \varepsilon^{(e)} = E \frac{du^{(e)}(x)}{dx} = E \frac{d^{(e)}}{dx} [N_1(x) \quad N_2(x)] [R] \begin{Bmatrix} U_1^{(e)} \\ U_2^{(e)} \\ U_3^{(e)} \\ U_4^{(e)} \end{Bmatrix}$$

مثال

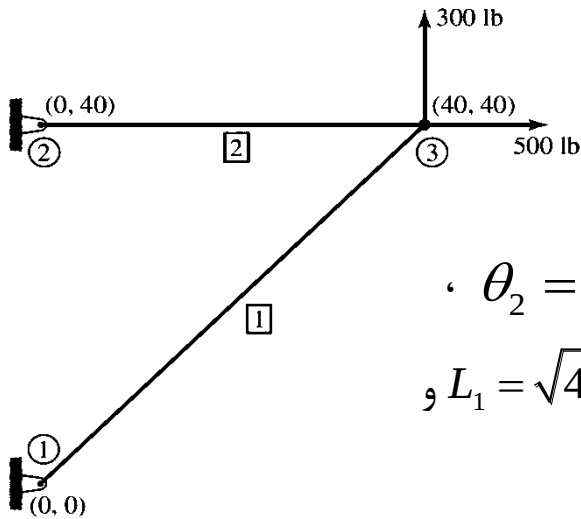
مولفه‌های جابجایی گره ۳، مولفه‌های نیرو در گره‌های ۱ و ۲ و جابجایی‌ها، کرنش‌ها و نیروهای هر یک از المان را تعیین کنید.



$$E_1 = E_2 = 10 \times 10^6 \text{ lb/in}^2$$

و مساحت مقطع عرضی $A_1 = A_2 = 1.5 \text{ in}^2$ می‌باشند.

حل

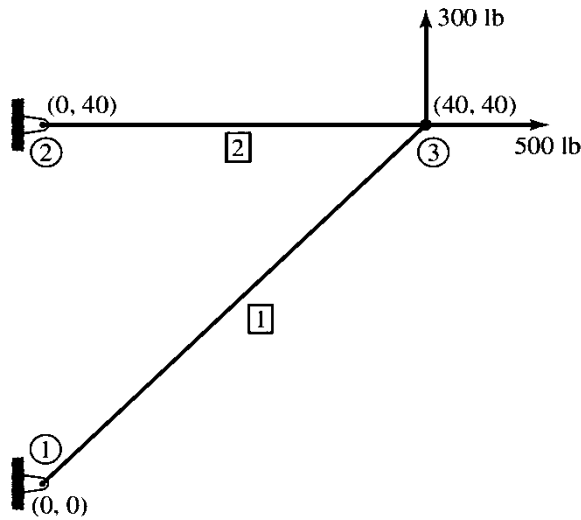


بر اساس مختصات گرهی داده شده $\theta_1 = \pi/4$ و $\theta_2 = 0$ ،
 همچنین طول المان‌ها برابر با $L_1 = \sqrt{40^2 + 40^2} \approx 56.57$ in و
 $L_2 = 40$ in می‌باشند.

بنابراین سختی المان‌ها به صورت زیر به دست می‌آیند:

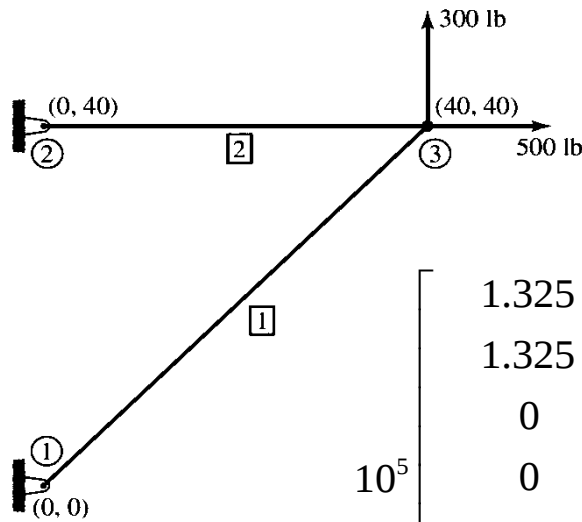
$$k_1 = \frac{A_1 E_1}{L_1} = \frac{1.5(10)(10^6)}{56.57} = 2.65(10^5) \text{ lb/in.}$$

$$k_2 = \frac{A_2 E_2}{L_2} = \frac{1.5(10)(10^6)}{40} = 3.75(10^5) \text{ lb/in.}$$



از آنجا که زاویه‌های جهت‌گیری المان‌ها و الگوی شماره-گذاری مشابه مثال قبل است، از نتیجه آن مثال برای نوشتن ماتریس سختی کل زیر استفاده می‌شود:

$$[K] = \begin{bmatrix} 1.325 & 1.325 & 0 & 0 & -1.325 & -1.325 \\ 1.325 & 1.325 & 0 & 0 & -1.325 & -1.325 \\ 0 & 0 & 3.75 & 0 & -3.75 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.325 & -1.325 & -3.75 & 0 & 5.075 & 1.325 \\ -1.325 & -1.325 & 0 & 0 & 1.325 & 1.325 \end{bmatrix} 10^5 \text{ lb/in.}$$



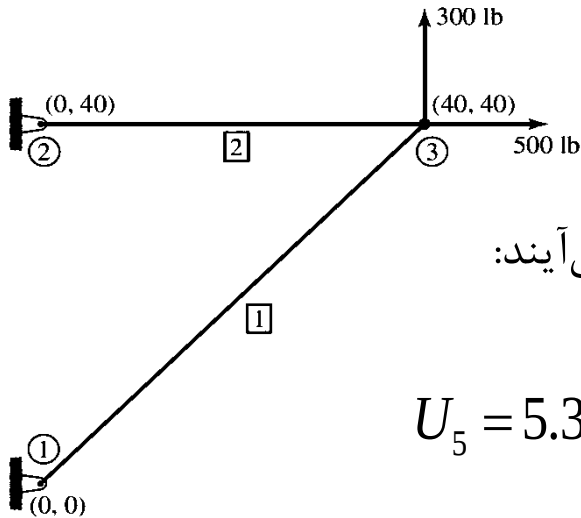
با وارد کردن جابجایی‌های مقید $U_1 = U_2 = U_3 = U_4 = 0$
معادلات تعادل کلی زیر حاصل می‌شوند:

$$10^5 \left[\begin{array}{cccc|cc} 1.325 & 1.325 & 0 & 0 & -1.325 & -1.325 \\ 1.325 & 1.325 & 0 & 0 & -1.325 & -1.325 \\ 0 & 0 & 3.75 & 0 & -3.75 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1.325 & -1.325 & -3.75 & 0 & 5.075 & 1.325 \\ -1.325 & -1.325 & 0 & 0 & 1.325 & 1.325 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ 500 \\ 300 \end{Bmatrix}$$

خط چین تکنیک پارتیشن‌بندی را نشان می‌دهد. از اینرو جابجایی‌های فعال توسط رابطه ماتریسی زیر تعیین می‌شوند:

$$10^5 \begin{bmatrix} 5.075 & 1.325 \\ 1.325 & 1.325 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 500 \\ 300 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} K_{cc} & K_{ca} \\ K_{ac} & K_{aa} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_c \\ U_a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_c \\ F_a \end{Bmatrix}$$



با حل همزمان این دو معادله، جابجایی‌ها بصورت زیر به دست می‌آیند:

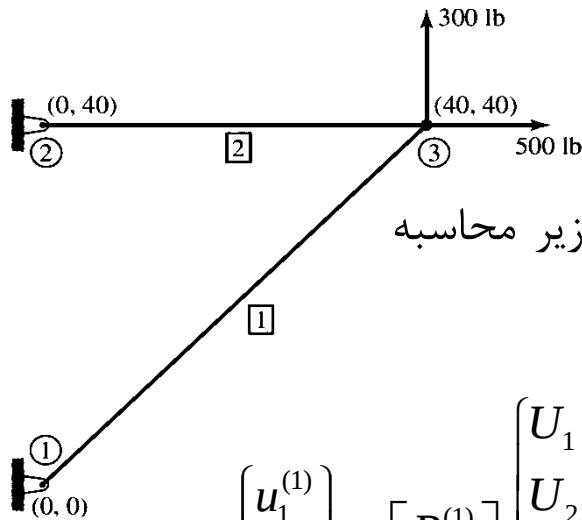
$$U_5 = 5.333 \times 10^{-4} \text{ in.}$$

$$U_6 = 1.731 \times 10^{-3} \text{ in.}$$

چون همه جابجایی‌های مقید صفر هستند، نیروهای عکس‌العمل را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد.

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \{F_c\} = [K_{ca}] \{U_a\} = 10^5 \begin{bmatrix} -1.325 & -1.325 \\ -1.325 & -1.325 \\ -3.75 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.5333 \\ 1.731 \end{Bmatrix} 10^{-3} = \begin{Bmatrix} -300 \\ -300 \\ -200 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ lb}$$

$$\{F_c\} = [K_{cc}] \{U_c\} + [K_{ca}] \{U_a\}$$

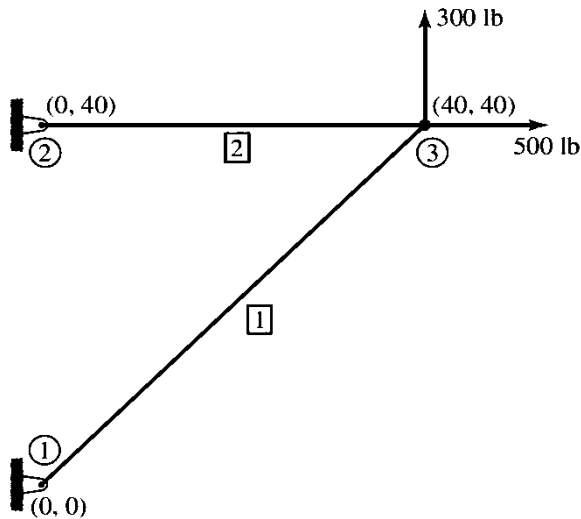


برای المان ۱، جابجایی‌های المان در دستگاه مختصات المان بصورت زیر محاسبه می‌گردند:

$$\begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{Bmatrix} = [R^{(1)}] \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5333 \\ 1.731 \end{Bmatrix} 10^{-3} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1.6 \end{Bmatrix} 10^{-3} \text{ in.}$$

تنش المان را نیز می‌توان به صورت زیر محاسبه نمود:

$$\sigma^{(1)} = E_1 \begin{bmatrix} -\frac{1}{L_1} & \frac{1}{L_1} \end{bmatrix} [R^{(1)}] \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} \quad \sigma^{(s)} = E \epsilon^{(s)} = E \frac{du^{(s)}(x)}{dx} = E \frac{d^{(s)}}{dx} [N_1(x) \quad N_2(x)] [R] \begin{Bmatrix} U_1^{(s)} \\ U_2^{(s)} \\ U_3^{(s)} \\ U_4^{(s)} \end{Bmatrix}$$



لذا با استفاده از جابجایی‌های محاسبه شده‌ی المان، داریم:

$$\sigma^{(1)} = 10(10^6) \begin{bmatrix} -\frac{1}{56.57} & \frac{1}{56.57} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1.6 \end{Bmatrix} 10^{-3} \approx 283 \text{ lb/in.}^2$$

که علامت مثبت نشان دهنده‌ی تنش کششی می‌باشد.

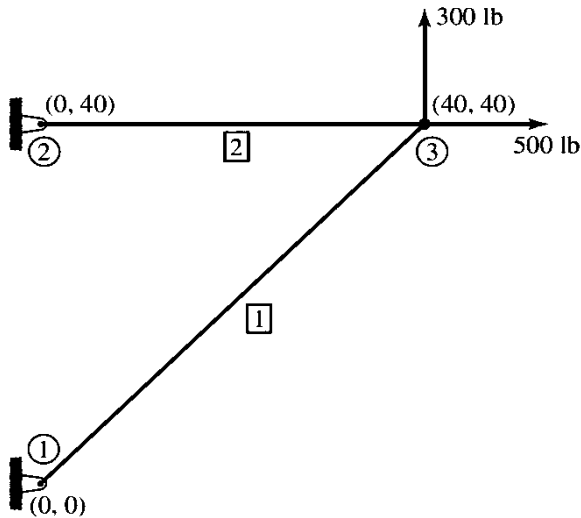
نیروهای گرهی المان نیز به‌صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$\begin{bmatrix} k_e & -k_e \\ -k_e & k_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^{(e)} \\ U_2^{(e)} \\ U_3^{(e)} \\ U_4^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(e)} \\ f_2^{(e)} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{Bmatrix} = 2.65(10^5) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1.6 \end{Bmatrix} 10^{-3}$$

$$= \begin{Bmatrix} -424 \\ 424 \end{Bmatrix} \text{ lb}$$

علائم جبری دو نیروی گرهی المان نیز کشش را نشان می‌دهند.



برای المان ۲ نیز با اعمال روندی مشابه، کمیت‌های خواسته شده به ترتیب بصورت زیر محاسبه می‌گردند:

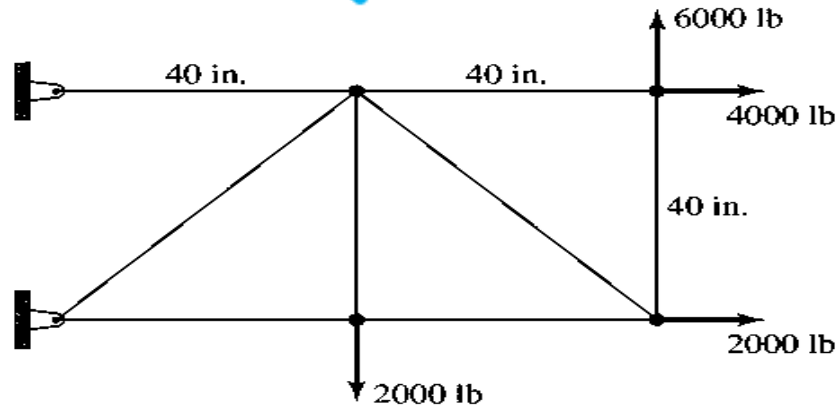
$$\begin{Bmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{Bmatrix} = [R^{(2)}] \begin{Bmatrix} U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5333 \\ 1.731 \end{Bmatrix} 10^{-3} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.5333 \end{Bmatrix} 10^{-4}$$

$$\sigma^{(2)} = 10(10^6) \begin{bmatrix} -\frac{1}{40} & \frac{1}{40} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.5333 \end{Bmatrix} 10^{-3} \approx 133 \text{ lb/in.}^2$$

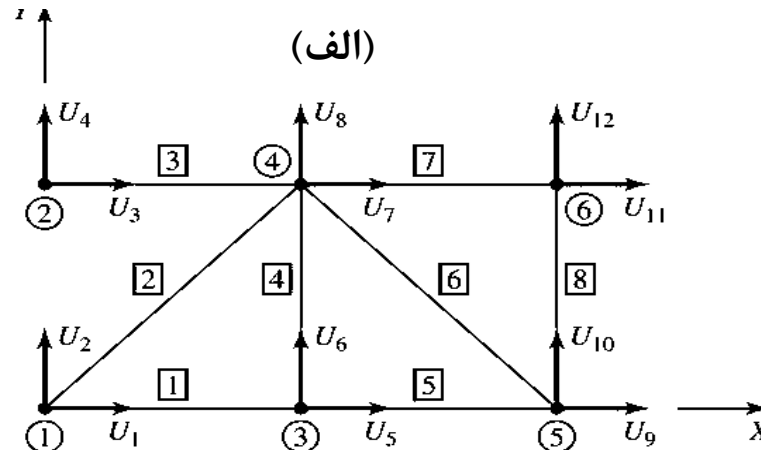
$$\begin{Bmatrix} f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{Bmatrix} = 3.75(10^5) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.5333 \end{Bmatrix} 10^{-3} = \begin{Bmatrix} -200 \\ 200 \end{Bmatrix} \text{ lb}$$

در اینجا نیز نتایج کشش را نشان می‌دهند.

مثال جامع



(الف)



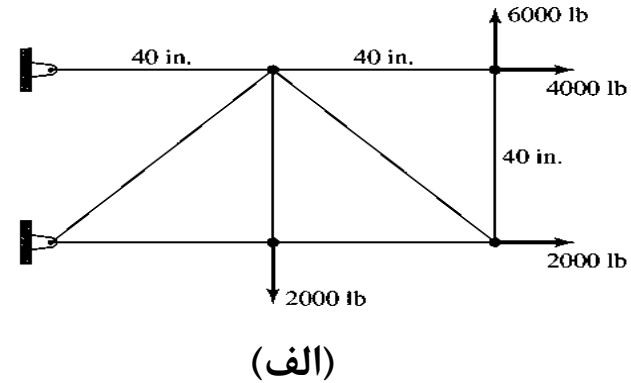
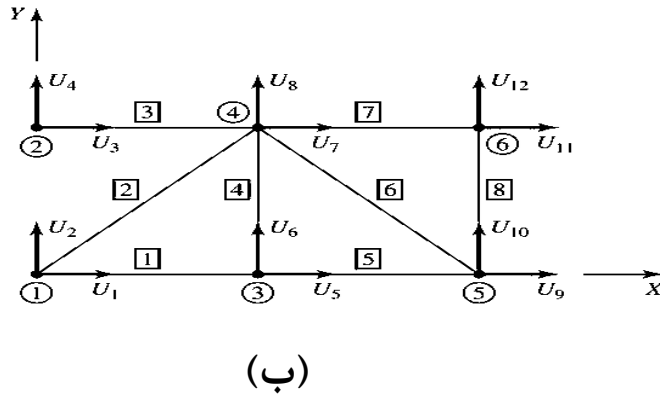
(ب)

$$E = 10 \times 10^6$$

$$A = 1.5 \text{ in}^2$$

الف) خرپای دو بعدی متشکل از ۸ المان

ب) شماره گذاری گره‌ها، المان‌ها و جابجایی‌های کلی

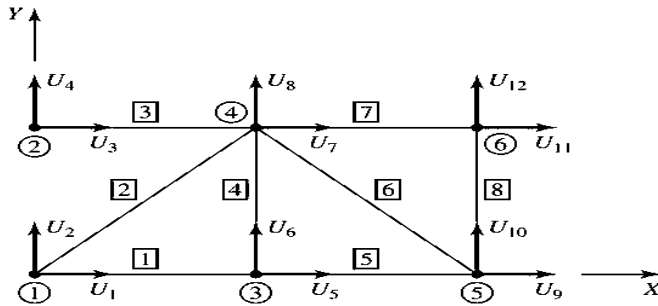


گام ۱: مطابق شکل (ب)، در این گام دستگاه مختصات کلی، شماره گره‌ها و ارتباط المان‌ها مشخص می‌گردند.

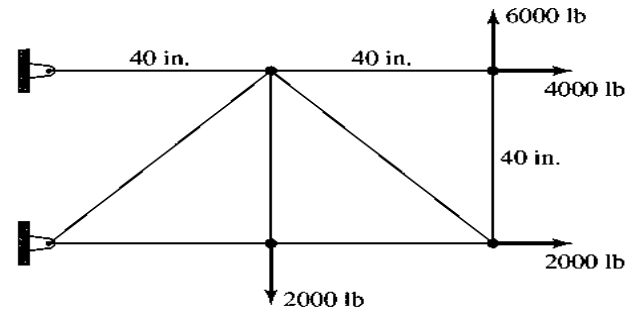
گام ۲: مقادیر سختی هر یک از المان‌ها بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$k^{(1)} = k^{(3)} = k^{(4)} = k^{(5)} = k^{(7)} = k^{(8)} = \frac{1.5(10^7)}{40} = 3.75(10^5) \text{ lb/in.}$$

$$k^{(2)} = k^{(6)} = \frac{1.5(10^7)}{40\sqrt{2}} = 2.65(10^5) \text{ lb/in.}$$



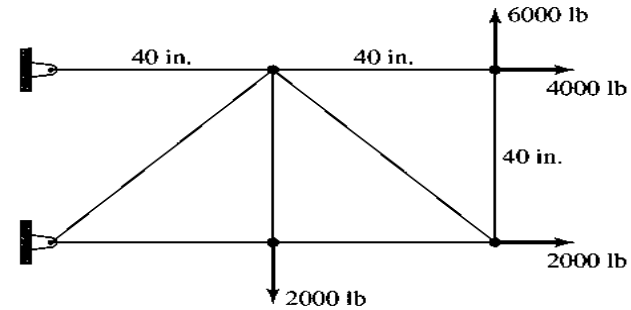
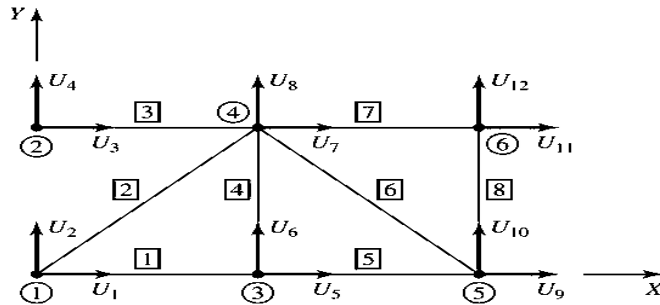
(ب)



(الف)

گام ۳: با توجه به زاویه جهت‌گیری المان‌ها مطابق زیر، ماتریس‌های سختی هر المان به دستگاه مختصات کلی منتقل می‌شوند.

$$\theta_1 = \theta_3 = \theta_5 = \theta_7 = 0 \quad \theta_4 = \theta_8 = \pi/2 \quad \theta_2 = \pi/4 \quad \theta_6 = 3\pi/4$$



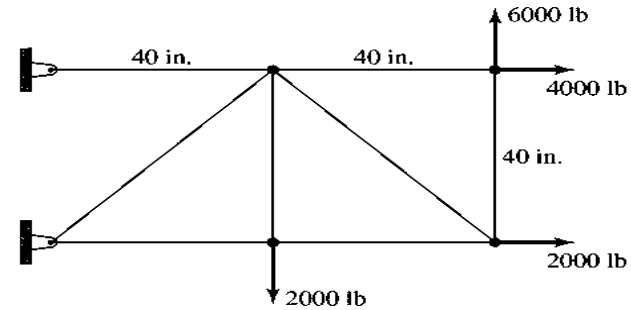
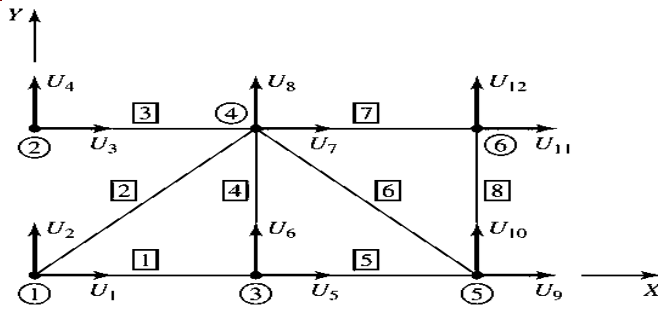
لذا ماتریس‌های سختی هر المان در دستگاه مختصات کلی به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$[K^{(1)}] = [K^{(3)}] = [K^{(5)}] = [K^{(7)}] = 3.75(10^5) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K^{(4)}] = [K^{(8)}] = 3.75(10^5) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K^{(2)}] = \frac{2.65(10^5)}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K^{(6)}] = \frac{2.65(10^5)}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$



اتصال و ارتباط جابجایی‌ها

المان ۸	المان ۷	المان ۶	المان ۵	المان ۴	المان ۳	المان ۲	المان ۱	کلی
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۲	۲	۲
۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۳
۰	۰	۰	۰	۰	۲	۰	۰	۴
۰	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۳	۵
۰	۰	۰	۲	۲	۰	۰	۴	۶
۰	۱	۳	۰	۳	۳	۳	۰	۷
۰	۲	۴	۰	۴	۴	۴	۰	۸
۱	۰	۱	۳	۰	۰	۰	۰	۹
۲	۰	۲	۴	۰	۰	۰	۰	۱۰
۳	۳	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱۱
۴	۴	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱۲

گام ۴ الف: جدول تناظر

جابجایی‌های المان به

جابجایی‌های کلی ایجاد

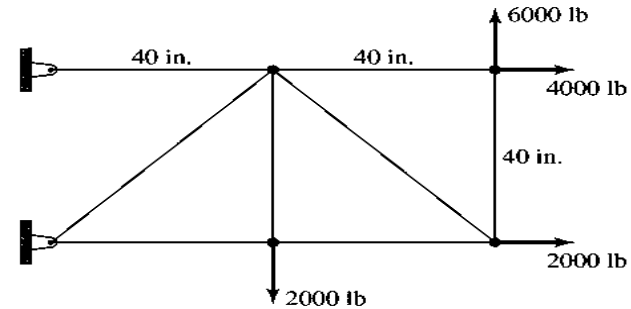
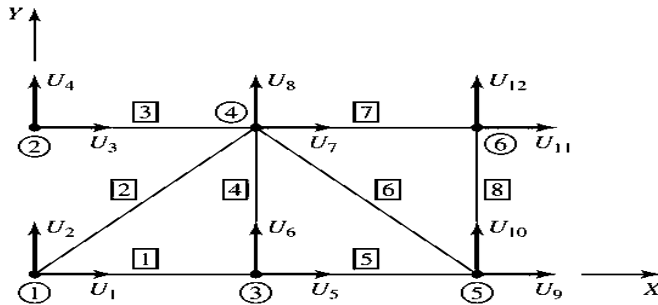
می‌گردد. با اشاره به

شکل (ب)، اتصال و

ارتباط جابجایی‌ها در

جدول مقابل نشان داده

شده است.



گام ۴ب: روش دیگر و موثرتر، ایجاد جدول اتصال گره به المان می‌باشد، برای این منظور بردار موقعیت جابجایی کلی المان برای هر المان برابر است با:

$$L^{(1)} = [1 \quad 2 \quad 5 \quad 6]$$

$$L^{(2)} = [1 \quad 2 \quad 7 \quad 8]$$

$$L^{(3)} = [3 \quad 4 \quad 7 \quad 8]$$

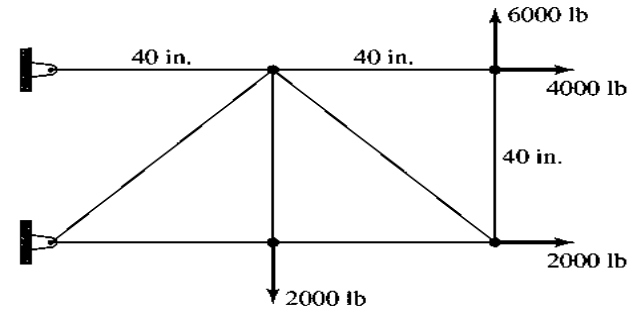
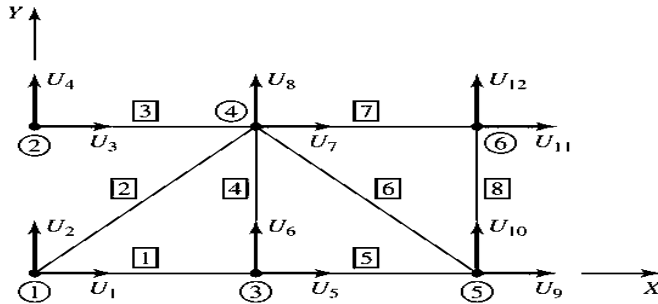
$$L^{(4)} = [5 \quad 6 \quad 7 \quad 8]$$

$$L^{(5)} = [5 \quad 6 \quad 9 \quad 10]$$

$$L^{(6)} = [9 \quad 10 \quad 7 \quad 8]$$

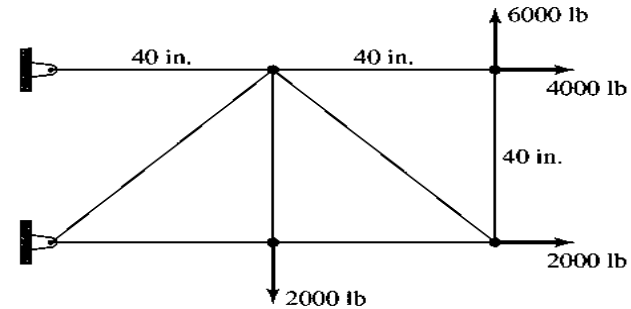
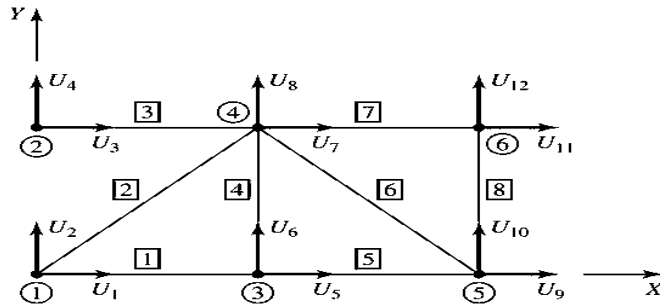
$$L^{(7)} = [7 \quad 8 \quad 11 \quad 12]$$

$$L^{(8)} = [9 \quad 10 \quad 11 \quad 12]$$



اتصال المان - گره

گره		
j	i	المان
۳	۱	۱
۴	۱	۲
۴	۲	۳
۴	۳	۴
۵	۳	۵
۴	۵	۶
۶	۴	۷
۶	۵	۸



گام ۵: مونتاژ ماتریس سختی کل از طریق گام‌های ۴ الف یا ۴ ب. در این گام مولفه‌های ماتریس سختی کل (به عنوان نمونه) به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$K_{11} = k_{11}^{(1)} + k_{11}^{(2)} = (3.75 + 2.65 / 2)10^5$$

$$K_{12} = k_{12}^{(1)} + k_{12}^{(2)} = (0 + 2.65 / 2)10^5$$

$$K_{13} = K_{14} = 0$$

$$K_{15} = k_{13}^{(1)} = -3.75(10^5)$$

$$K_{16} = k_{14}^{(1)} = 0$$

$$K_{17} = k_{13}^{(2)} = -(2.65 / 2)10^5$$

$$K_{18} = k_{14}^{(2)} = -(2.65 / 2)10^5$$

$$K_{19} = K_{1,10} = K_{1,11} = K_{1,12} = 0$$

$$K_{22} = k_{22}^{(1)} + k_{22}^{(2)} = 0 + (2.65 / 2)10^5$$

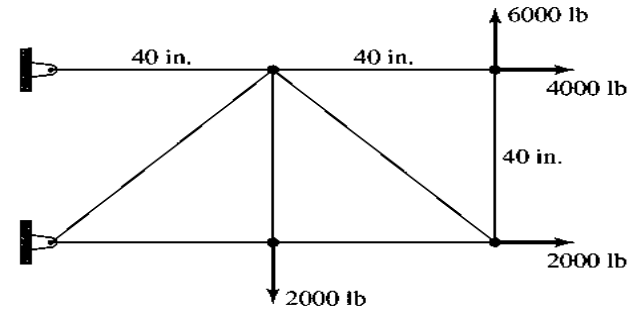
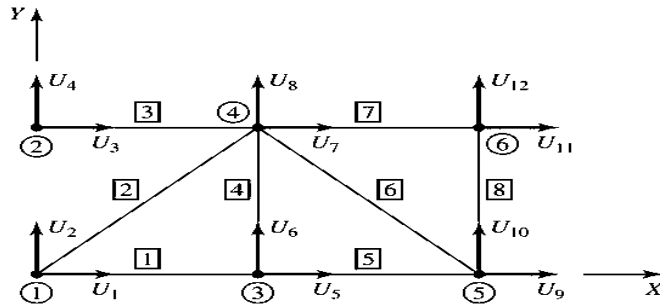
$$K_{23} = K_{24} = 0$$

$$K_{25} = k_{23}^{(1)} = 0$$

$$K_{26} = k_{24}^{(1)} = 0$$

$$K_{27} = k_{23}^{(2)} = -(2.65 / 2)(10^5)$$

$$K_{28} = k_{24}^{(2)} = -(2.65 / 2)(10^5)$$



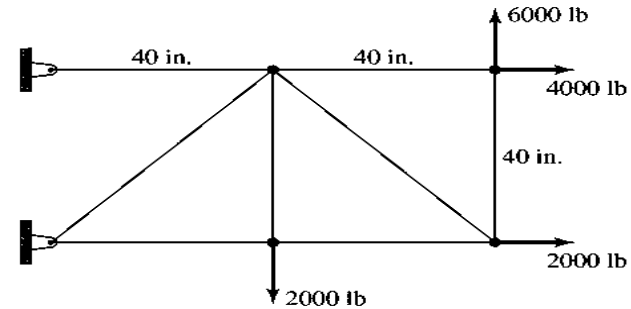
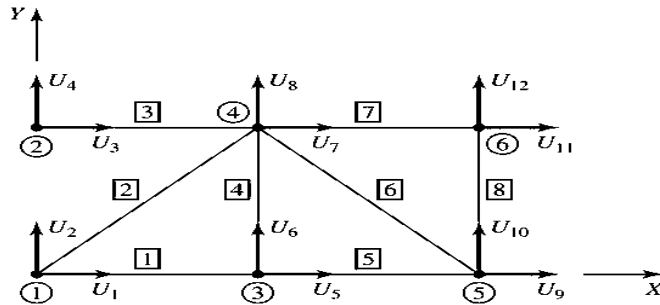
گام ۶: در این مرحله محدودیت‌های ناشی از شرایط مرزی اعمال می‌شوند. در این مثال گره‌های ۱ و ۲ ثابت هستند، بنابراین محدودیت‌های جابجایی عبارتند از:

$$U_1 = U_2 = U_3 = U_4 = 0$$

لذا چهار معادله نخست از دستگاه ماتریسی 12×12 حذف می‌شوند:

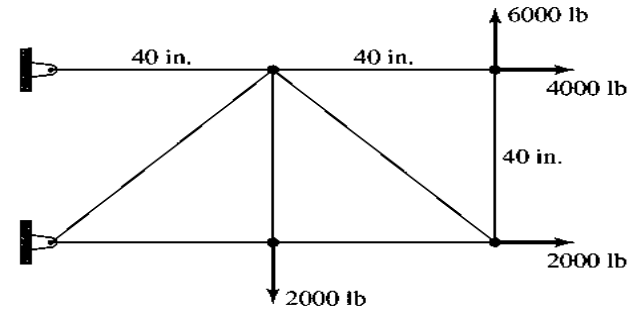
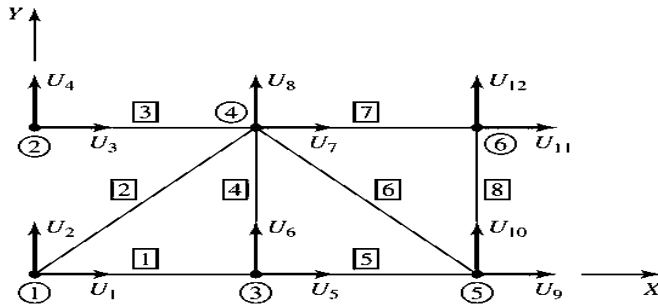
$$[K_{aa}] \begin{Bmatrix} U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \\ U_{10} \\ U_{11} \\ U_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2000 \\ 0 \\ 0 \\ 2000 \\ 0 \\ 4000 \\ 6000 \end{Bmatrix}$$

به‌طوری‌که این دستگاه معادلات جابجایی‌های فعال می‌باشند.



گام ۷: در این مرحله معادلات متناظر با جابجایی‌های غیر مقید (فعال) حل می‌شوند. برای مثال تحت بررسی، معادلات با استفاده از برنامه‌های رایانه‌ای و به کمک معکوس ماتریس سختی کل حل شده و نتیجه به صورت زیر آورده شده است.

$$\begin{Bmatrix} U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \\ U_{10} \\ U_{11} \\ U_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.02133 \\ 0.04085 \\ -0.01600 \\ 0.04619 \\ 0.04267 \\ 0.15014 \\ -0.00533 \\ 0.16614 \end{Bmatrix} \text{ in.}$$



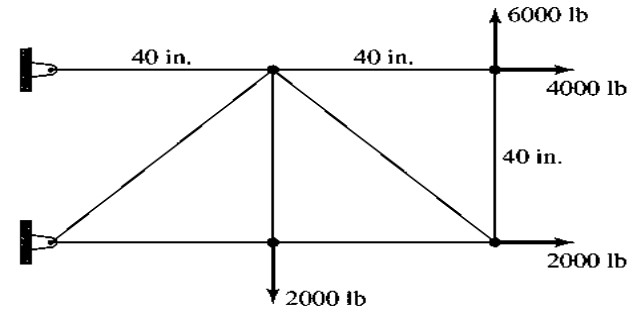
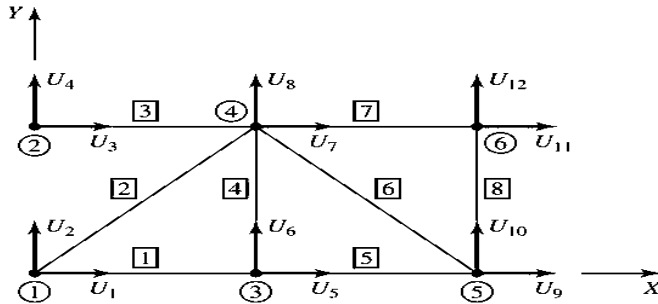
گام ۸: در این گام با جایگذاری مقادیر جابجایی‌های محاسبه شده در معادلات مقید،

نیروهای عکس‌العمل محاسبه می‌شوند. اکنون با توجه به اینکه $\{U_c\} = \{0\}$

از چهار معادله‌ای که قبلاً حذف شدند، استفاده می‌شود و مولفه‌های نیرو در گره‌های ۱ و ۲ به دست می‌آیند.

معادلات مقید به صورت زیر می‌باشند:

$$K_{i5}U_5 + K_{i6}U_6 + \dots + K_{i,12}U_{12} = F_i \quad i = 1, 4$$

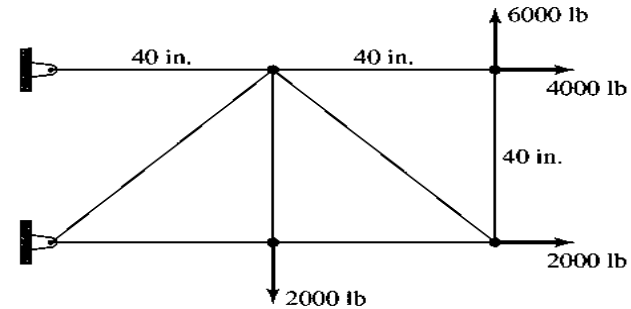
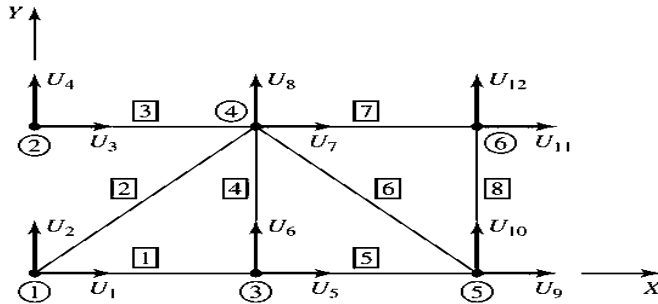


$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -12,000 \\ -4,000 \\ 6,000 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ lb}$$

و بنابراین با جایگذاری جابجایی‌های محاسبه شده، مقادیر روبرو به دست می‌آیند:

خواننده علاقه‌مند می‌تواند از مولفه‌های نیروهای عکس‌العمل استفاده کرده و شرایط تعادل سازه را کنترل نماید.

گام ۹: در این گام کرنش و تنش در هر المان محاسبه می‌شود. با استفاده از مولفه‌های جابجایی هر گره در دستگاه مختصات کلی و معلوم بودن جابجایی‌های مقید، می‌توان جابجایی‌های هر المان را در دستگاه مختصات آن المان به دست آورد و پس از آن کرنش و تنش در هر المان را محاسبه نمود.



به عنوان مثال در المان ۲:

$$u_1^{(2)} = U_1 \cos \theta_2 + U_2 \sin \theta_2 = 0$$

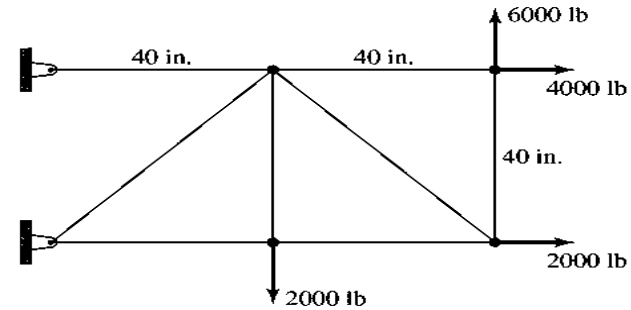
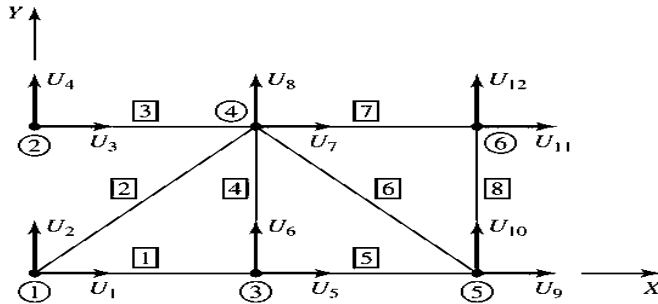
$$u_2^{(2)} = U_7 \cos \theta_2 + U_8 \sin \theta_2 = (-0.01600 + 0.04618)\sqrt{2} / 2 = 0.02134$$

لذا کرنش محوری در المان ۲ برابر است با:

$$\varepsilon^{(2)} = \frac{u_2^{(2)} - u_1^{(2)}}{L^{(2)}} = \frac{0.02133}{40\sqrt{2}} = 3.771(10^{-4})$$

و تنش محوری نظیر نیز به صورت زیر حاصل می شود:

$$\sigma^{(2)} = E\varepsilon^{(2)} = 3771 \text{ psi}$$



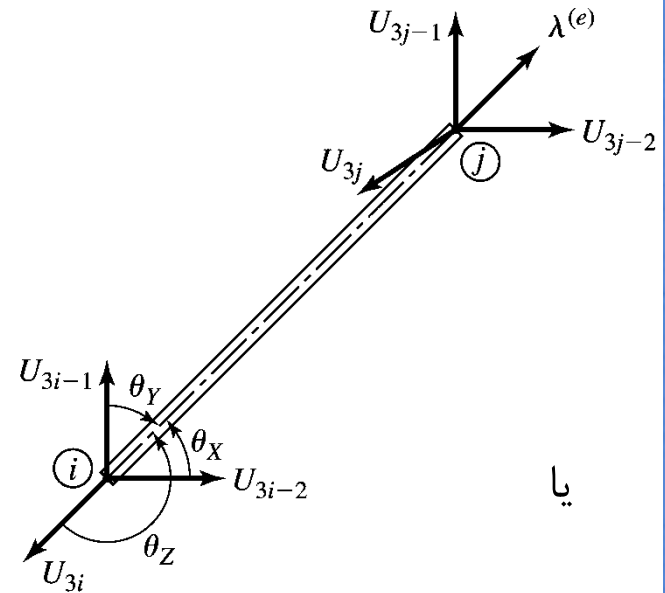
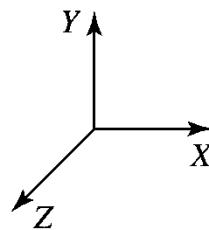
نتایج مربوط به هشت المان

المان	تنش (psi)	کرنش
۱	۵۳۳۳	$۳۳/۵(۱۰^{-۴})$
۲	۳۷۷۱	$۷۷/۳(۱۰^{-۴})$
۳	-۴۰۰۰	$-۰/۴(۱۰^{-۴})$
۴	۱۳۳۳	$۳۳/۱(۱۰^{-۴})$
۵	۵۳۳۳	$۳۳/۵(۱۰^{-۴})$
۶	-۵۶۵۷	$-۶۷/۵(۱۰^{-۴})$
۷	۲۶۶۷	$۶۷/۲(۱۰^{-۴})$
۸	۴۰۰۰	$۰/۴(۱۰^{-۴})$

خربایی سه بعدی

$$\lambda^{(e)} = \frac{1}{L} [(X_j - X_i)\mathbf{I} + (Y_j - Y_i)\mathbf{J} + (Z_j - Z_i)\mathbf{K}]$$

$$\lambda^{(e)} = \cos \theta_x \mathbf{I} + \cos \theta_y \mathbf{J} + \cos \theta_z \mathbf{K}$$



یا

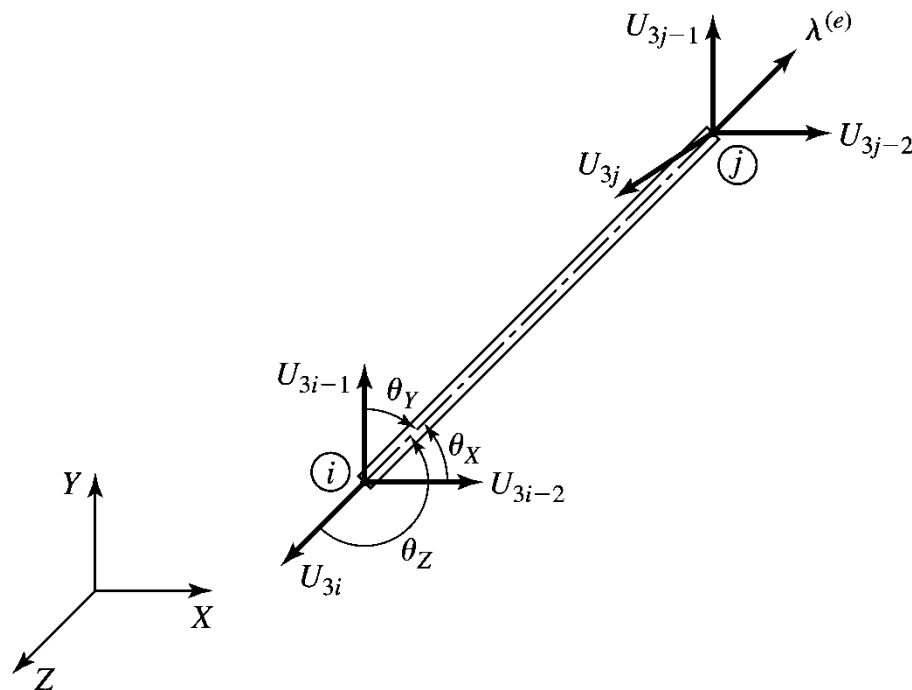
بنابراین جابجایی‌های المان بر اساس مولفه‌های دستگاه کلی سه بعدی به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$u_1^{(e)} = U_1^{(e)} \cos \theta_x + U_2^{(e)} \cos \theta_y + U_3^{(e)} \cos \theta_z$$

$$u_2^{(e)} = U_4^{(e)} \cos \theta_x + U_5^{(e)} \cos \theta_y + U_6^{(e)} \cos \theta_z$$

خرپاهای سه بعدی

از اینرو علامت‌گذاری به‌نحوی است که جابجایی‌های المانی ۱ و ۴ در جهت کلی X ، جابجایی‌های المانی ۲ و ۵ در جهت کلی Y و جابجایی‌های المانی ۳ و ۶ در جهت کلی Z باشند.



المان میله در دستگاه مختصات کلی سه بعدی

خرمایی سه بعدی

$$\begin{Bmatrix} u_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_x & \cos \theta_y & \cos \theta_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta_x & \cos \theta_y & \cos \theta_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^{(e)} \\ U_2^{(e)} \\ U_3^{(e)} \\ U_4^{(e)} \\ U_5^{(e)} \\ U_6^{(e)} \end{Bmatrix}$$

$$= [R] \{U^{(e)}\}$$

که $[R]$ ماتریس انتقال جابجایی‌های المانی یک بعدی به دستگاه مختصات کلی سه بعدی می‌باشد. با پیروی از روندی مشابه با آنچه برای حالت دو بعدی استفاده شد، ماتریس سختی المان در دستگاه مختصات المانی به صورت زیر به دستگاه مختصات کلی سه بعدی منتقل می‌شود.

خرمایی سه بعدی

$$[K^{(e)}] = [R]^T \begin{bmatrix} k_e & -k_e \\ -k_e & k_e \end{bmatrix} [R]$$

$$[K^{(e)}] = k_e \begin{bmatrix} c_x^2 & c_x c_y & c_x c_z & -c_x^2 & -c_x c_y & c_x c_z \\ c_x c_y & c_y^2 & c_y c_z & -c_x c_x & -c_y^2 & -c_y c_z \\ c_x c_z & c_y c_z & c_z^2 & -c_x c_z & -c_y c_z & -c_z^2 \\ -c_x^2 & -c_x c_x & -c_x c_z & c_x^2 & c_x c_y & c_x c_z \\ -c_x c_y & -c_y^2 & -c_y c_z & c_x c_y & c_y^2 & c_y c_z \\ -c_x c_z & -c_y c_z & -c_z^2 & c_x c_z & c_y c_z & c_z^2 \end{bmatrix}$$

$$c_x = \cos \theta_x$$

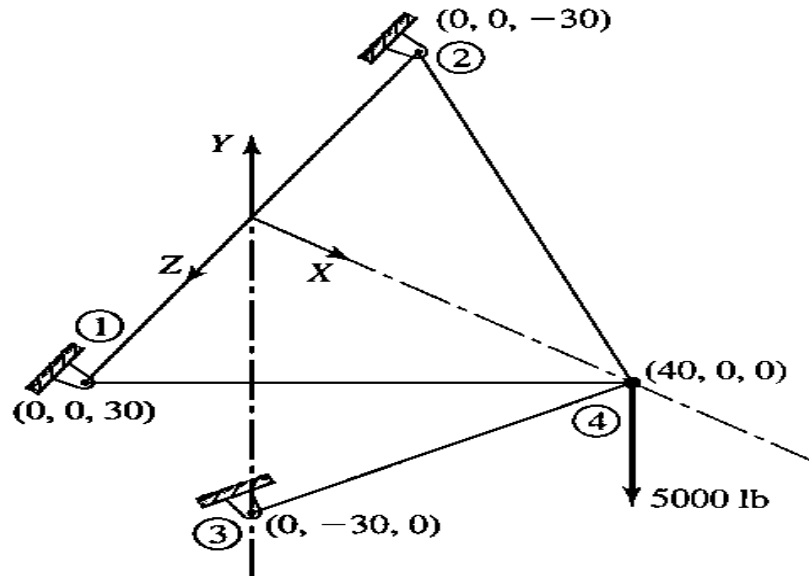
$$c_y = \cos \theta_y$$

$$c_z = \cos \theta_z$$

که در آن

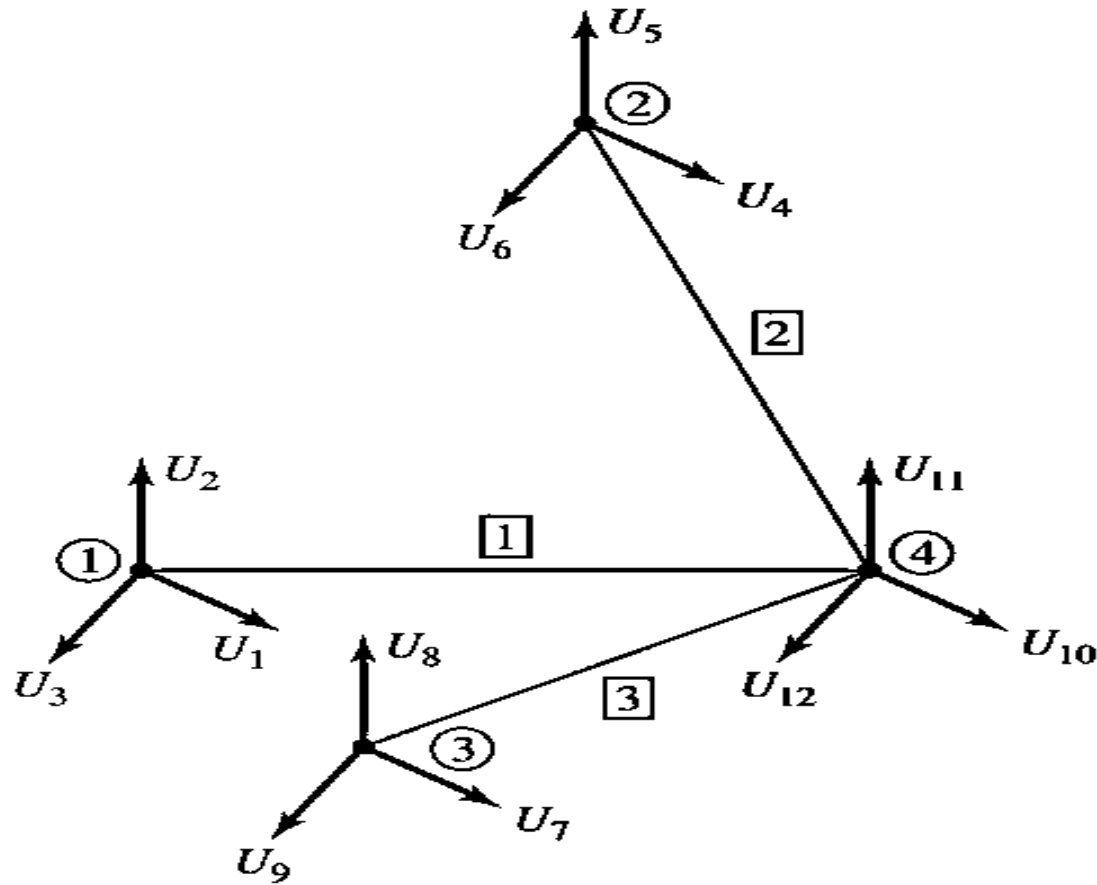
مثال

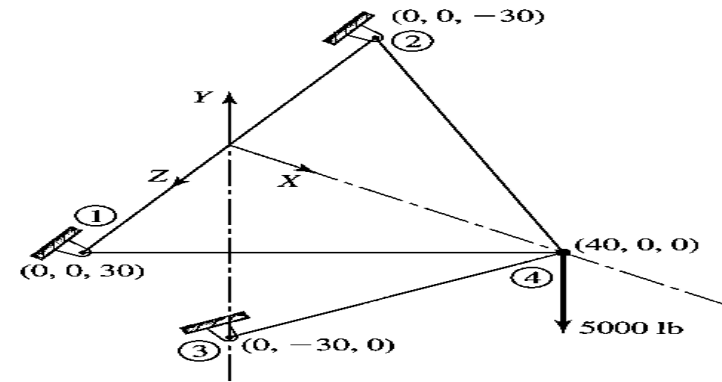
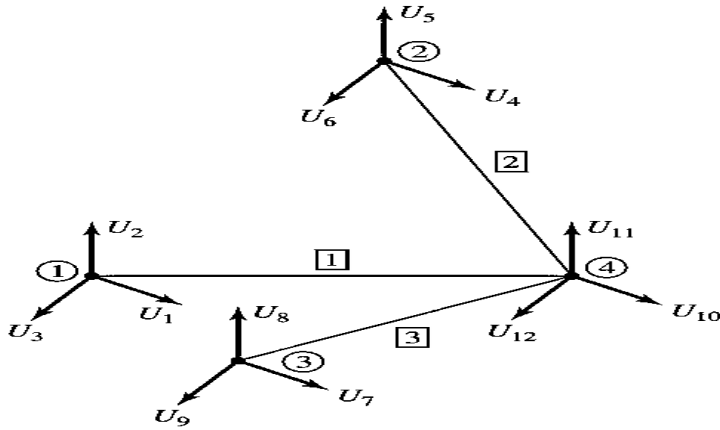
خربای سه عضوی نشان داده شده در شکل با استفاده از اتصالات مفصلی چرخنده به گره‌های ۱، ۲ و ۳ متصل شده است. مطابق شکل، یک نیروی 5000 lb در جهت منفی Y به گره ۴ وارد می‌شود. هر سه عضو یکسان هستند و دارای سختی محوری $3 \times 10^5 \text{ lb/in}$ می‌باشند. مولفه‌های جابجایی گره ۴ را با استفاده از مدلسازی اجزاء محدودی با المان‌های میله محاسبه کنید.



خربای سه بعدی سه المانی

مثال

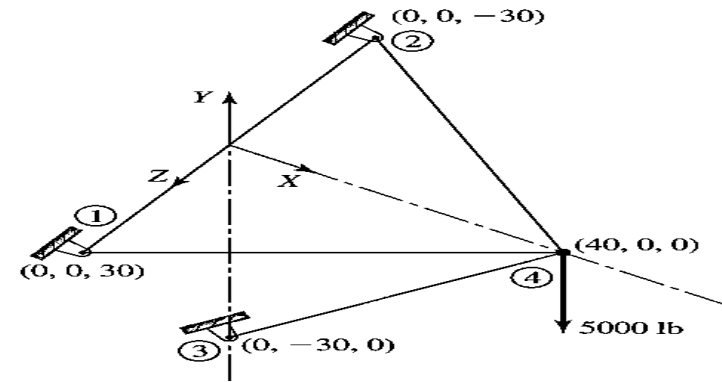
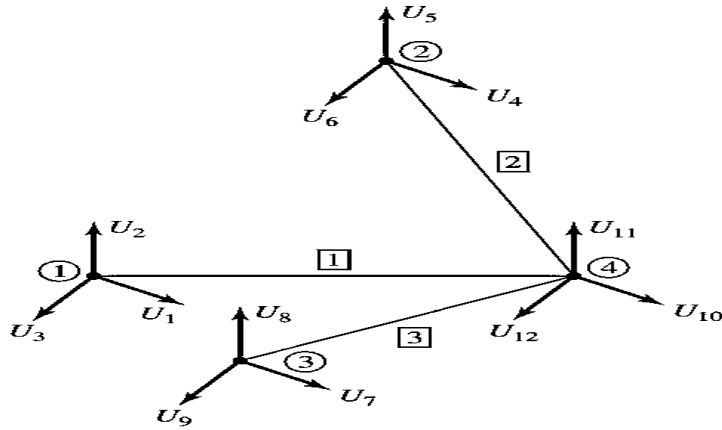




حل

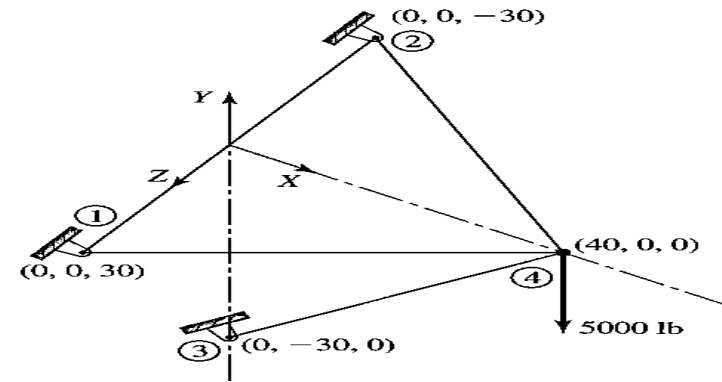
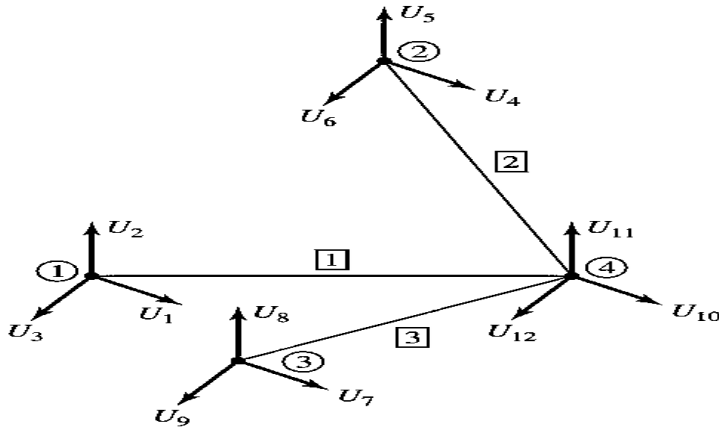
$$\begin{bmatrix} K_{10,10} & K_{10,11} & K_{10,12} \\ K_{11,10} & K_{11,11} & K_{11,12} \\ K_{12,10} & K_{12,11} & K_{12,12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{10} \\ U_{11} \\ U_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -5000 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

قبل از مونتاژ درایه‌های مورد نیاز در ماتریس سختی سیستم، ماتریس‌های سختی هر المان باید به مختصات کلی منتقل شوند:



تناظر جابجایی المانی به جابجایی کلی

المان ۳	المان ۲	المان ۱	جابجایی کلی
۰	۰	۱	۱
۰	۰	۲	۲
۰	۰	۳	۳
۰	۱	۰	۴
۰	۲	۰	۵
۰	۳	۰	۶
۱	۰	۰	۷
۲	۰	۰	۸
۳	۰	۰	۹
۴	۴	۴	۱۰
۵	۵	۵	۱۱
۶	۶	۶	۱۲



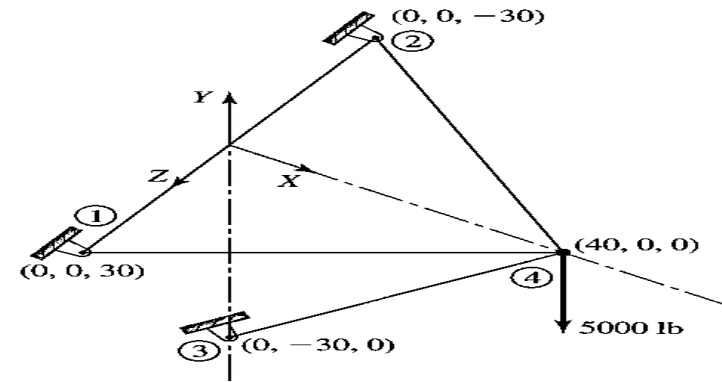
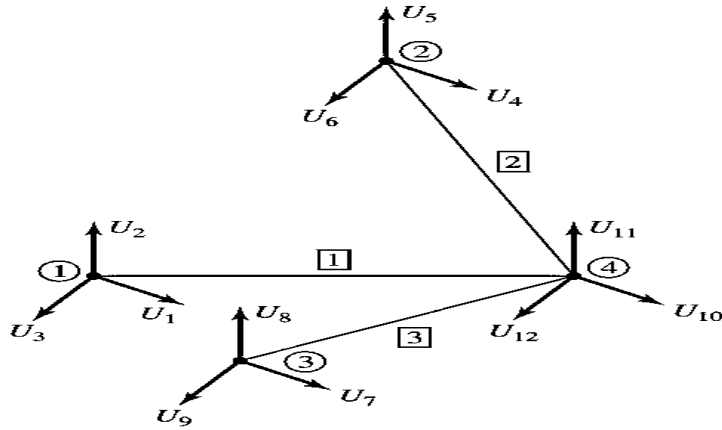
$$\lambda^{(1)} = \frac{1}{50} [(40-0)\mathbf{I} + (0-0)\mathbf{J} + (0-30)\mathbf{K}] = 0.8\mathbf{I} - 0.6\mathbf{K}$$

المان ۱

از این رو $c_x = 0.8$ ، $c_y = 0$ و $c_z = -0.6$ می‌باشند و با استفاده از این مقادیر رابطه (۳-۵۹)

برای المان ۱ به صورت زیر حاصل می‌شود.

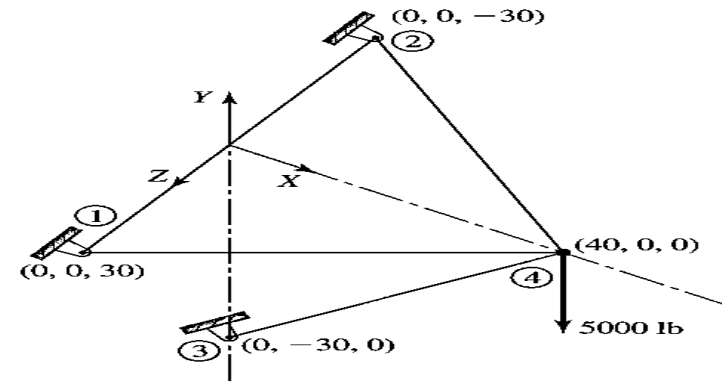
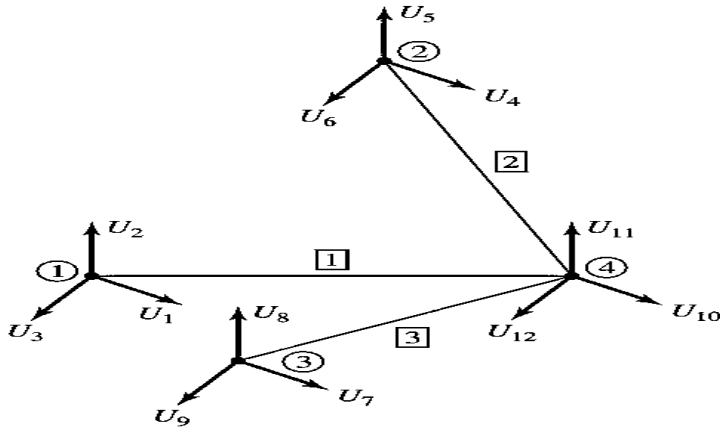
$$[K^{(1)}] = 3(10^5) \begin{bmatrix} 0.64 & 0 & -0.48 & -0.64 & 0 & 0.48 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.48 & 0 & 0.36 & 0.48 & 0 & -0.36 \\ -0.64 & 0 & 0.48 & 0.64 & 0 & -0.48 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.48 & 0 & -0.36 & -0.48 & 0 & 0.36 \end{bmatrix} \text{ lb/in.}$$



المان ۲

$$\lambda^{(2)} = \frac{1}{50} [(40-0)\mathbf{I} + (0-0)\mathbf{J} + (0-(-30))\mathbf{K}] = 0.8\mathbf{I} + 0.6\mathbf{K}$$

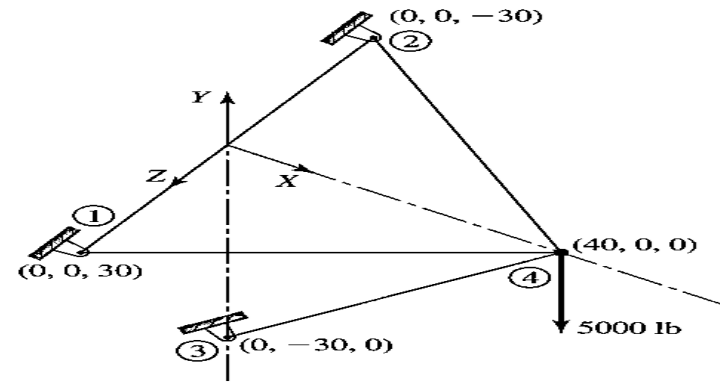
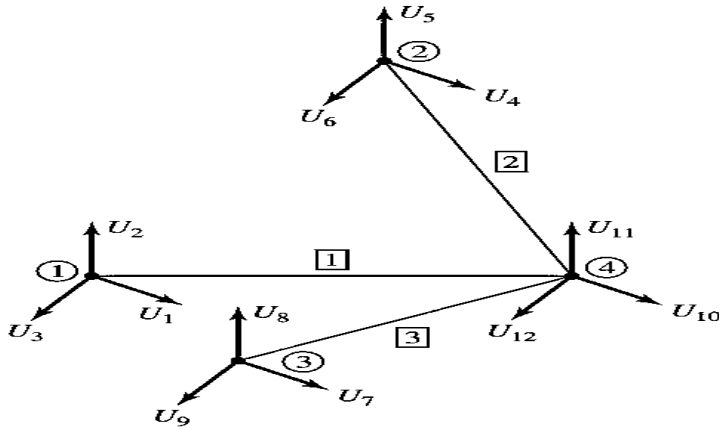
$$[K^{(2)}] = 3(10^5) \begin{bmatrix} 0.64 & 0 & 0.48 & -0.64 & 0 & -0.48 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.48 & 0 & 0.36 & -0.48 & 0 & -0.36 \\ -0.64 & 0 & -0.48 & 0.64 & 0 & 0.48 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.48 & 0 & -0.36 & 0.48 & 0 & 0.36 \end{bmatrix} \text{ lb/in.}$$



المان ۳

$$\lambda^{(3)} = \frac{1}{50} [(40-0)\mathbf{I} + (0-(-30))\mathbf{J} + (0-0)\mathbf{K}] = 0.8\mathbf{I} + 0.6\mathbf{J}$$

$$[K^{(3)}] = 3(10^5) \begin{bmatrix} 0.64 & 0.48 & 0 & -0.64 & -0.48 & 0 \\ 0.48 & 0.36 & 0 & -0.48 & -0.36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.64 & -0.48 & 0 & 0.64 & 0.48 & 0 \\ -0.48 & -0.36 & 0 & 0.48 & 0.36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ lb/in.}$$



با توجه به سه ردیف آخر جدول تناظر جابجایی‌ها، درایه‌های مورد نیاز ماتریس سختی کل به صورت زیر مونتاژ می‌شوند:

$$K_{10,10} = k_{44}^{(1)} + k_{44}^{(2)} + k_{44}^{(3)} = 3(10^5)(0.64 + 0.64 + 0.64) = 5.76(10)^{(5)} \text{ lb / in.}$$

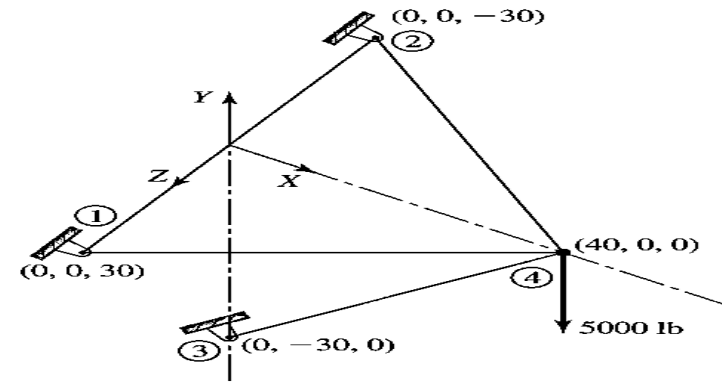
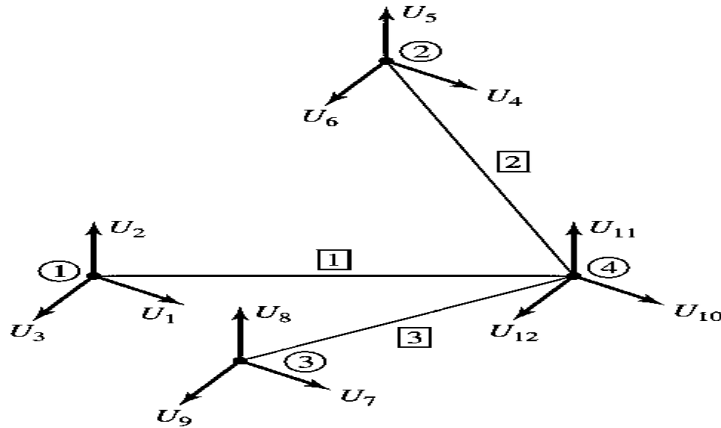
$$K_{10,11} = K_{11,10} = k_{45}^{(1)} + k_{45}^{(2)} + k_{45}^{(3)} = 3(10^5)(0 + 0 + 0.48) = 1.44(10)^{(5)} \text{ lb / in.}$$

$$K_{10,12} = K_{12,10} = k_{46}^{(1)} + k_{46}^{(2)} + k_{46}^{(3)} = 3(10^5)(-0.48 + 0.48 + 0) = 0 \text{ lb / in.}$$

$$K_{11,11} = k_{55}^{(1)} + k_{55}^{(2)} + k_{55}^{(3)} = 3(10^5)(0 + 0 + 0.36) = 1.08(10)^{(5)} \text{ lb / in.}$$

$$K_{11,12} = K_{12,11} = k_{56}^{(1)} + k_{56}^{(2)} + k_{56}^{(3)} = 3(10^5)(0 + 0 + 0) = 0 \text{ lb / in.}$$

$$K_{12,12} = k_{66}^{(1)} + k_{66}^{(2)} + k_{66}^{(3)} = 3(10^5)(0.36 + 0.36 + 0) = 2.16(10)^{(5)} \text{ lb / in.}$$



دستگاه معادلاتی که برای محاسبه جابجایی‌های گره ۴ باید حل شود، برابر است با:

$$10^5 \begin{bmatrix} 5.76 & 1.44 & 0 \\ 1.44 & 1.08 & 0 \\ 0 & 0 & 2.16 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{10} \\ U_{11} \\ U_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -5000 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

با حل همزمان این معادلات مقادیر زیر حاصل می‌شوند:

$$U_{10} = 0.01736 \text{ in.}$$

$$U_{11} = -0.06944 \text{ in.}$$

$$U_{12} = 0$$

خلاصه

❖ علی‌رغم استفاده از تنها یک المان (المان محوری ساده)، مراحل تشریح‌شده برای همه‌ی المان‌ها و انواع تحلیل‌های اجزاء محدود مشترک است.

❖ روش سختی مستقیم، ساده‌ترین روش برای مونتاژ ماتریس‌های مورد نیاز برای تحلیل اجزاء محدود است.